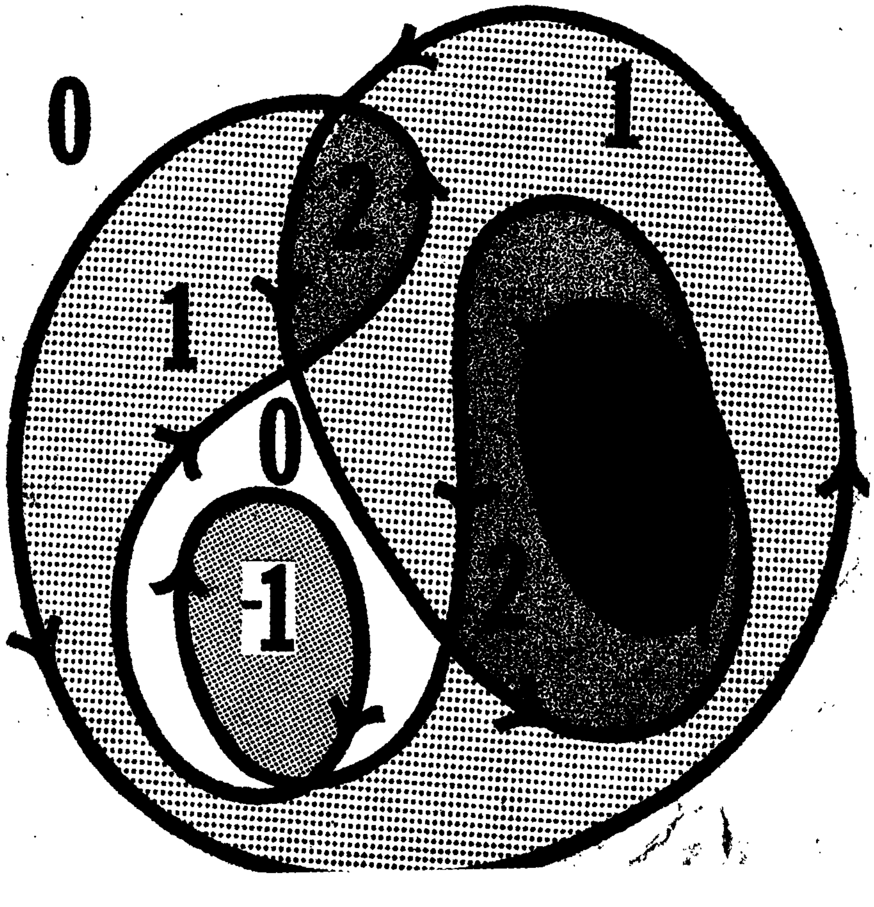
Н. СТИНРОД
У. ЧИНН

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ



NEW MATHEMATICAL LIBRARY
THE SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP

FIRST CONCEPTS OF TOPOLOGY

THE GEOMETRY OF MAPPINGS OF SEGMENTS, CURVES, CIRCLES AND DISKS

by

W. G. Chinn

San Francisco Public Schools

and

N. E. Steenrod

Princeton University

RANDOM HOUSE
New York·Toronto·1966

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

——————*Популярная серия*

Н. СТИНРОД, У. ЧИНН

Первые понятия топологии

ГЕОМЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТРЕЗКОВ, КРИВЫХ, ОКРУЖНОСТЕЙ И КРУГОВ

Перевод с английского
И. А. Вайнштейна

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“
Москва 1967

УДК 513.83

Иногда говорят, что топология — это качественная геометрия, но в наши дни едва ли следует считать топологию лишь частью геометрии. Она представляет собой один из наиболее бурно и интенсивно развивающихся разделов математики и все шире проникает в самые разнообразные области математических знаний. Все больше приложений находит топология и вне математики.

Эта книга посвящена основным и простейшим понятиям топологии. На примере двух важных теорем авторы показывают, как эти понятия возникают, как они позволяют правильно понять и точно сформулировать некоторые утверждения и как с помощью топологических методов эти утверждения можно доказать.

Книга написана ясным языком, содержит много полезных упражнений, от читателя не требуется предварительных знаний по топологии. Книга, безусловно, заинтересует всех любителей математики начиная с учащихся старших классов средней школы.

Редакция литературы по математическим наукам

ИНД. 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Эта небольшая книга, заметно отличающаяся по своему характеру и содержанию от всех других известных нам научно-популярных книг на близкую тему (об этом еще будет сказано ниже), бесспорно, обладает большими достоинствами: она посвящена достаточно глубоким и важным идеям и теоремам, но притом доступна и малоопытному читателю, строга без излишнего педантизма, элегантна и лишена всяких элементов вульгаризации, столь частых в литературе для начинающих. Авторы книги — выдающийся американский ученый Норман Стинрод и опытный преподаватель Уильям Чинн, связанный с известной Исследовательской группой по школьной математике, которая объединяет многих видных математиков и педагогов США.

В книге рассматриваются некоторые вопросы очень интересного раздела современной математики — топологии, идеи которой начинают занимать все более и более важное место в общей математической культуре. В настоящее время топология переживает период бурного развития: она активно вторгается в другие разделы математики, частично вытесняя свою старшую сестру — геометрию, рамки топологии раздвигаются сразу в нескольких направлениях. Об этом говорят в своем введении и авторы настоящей книги. Однако начинающему читателю это введение может показаться трудным; в таком случае можно лишь бегло просмотреть его и приступить к изучению основного текста книги.

Отличие настоящей книги от других начальных книг по топологии (некоторые из них указаны в приложенном к русскому изданию списке литературы) состоит в том, что авторы не пытаются описать различные занимательные эффекты (родственные области «математических развлечений»), которых довольно много в этой науке. Они уделяют внимание лишь нескольким действительно первичным понятиям топологии и лишь одной задаче, которая на самом деле является очень важной. На примере этой задачи авторам удается показать читателю сущность топологии и ее связь с другими разделами математики.

В первую очередь книга рассчитана на тех, кто только начинает интересоваться математикой — учеников старших классов средней школы, студентов-первокурсников. Но она будет очень интересной и для преподавателей математики.

И. М. Яглом

Введение

Когда мы писали эту книгу, нашей целью было показать, как топология возникла, ввести и объяснить первые ее понятия и рассказать о некоторых из ее простейших приложений.

Отдельной областью математики топологию стали считать примерно пятьдесят лет назад, но в основном ее развитие приходится на последние тридцать лет. Будучи самой энергичной из новых ветвей математики, она оказала огромное влияние и на большинство более старых ветвей. Топология была вызвана к жизни потребностями анализа (части математики, охватывающей дифференциальное и интегральное исчисление и дифференциальные уравнения). Но она не является отделом анализа, это скорее один из видов геометрии. Топология не так специализирована, как, скажем, проективная или дифференциальная геометрия, напротив, она является примитивной, элементарной формой, лежащей в основе всякой геометрии. Самое поразительное — что идеи топологии проникают почти во все области математики. В большей части этих приложений топология дает важные орудия и понятия для доказательства некоторых основных предложений, известных под названием теорем *существования.*

Наш рассказ о началах топологии будет концентрироваться вокруг двух теорем существования из анализа. Первая из них, о которой идет речь в части I, играет в анализе фундаментальную роль. Она была известна задолго до того, как топология была осознана как отдельный предмет. Разрабатывая ее доказательство, мы разовьем основные идеи топологии. При этом будет показано, как топология возникла и почему она полезна. Вторая главная теорема, изложенная в части II, является обобщением первой на случай двух измерений. В отличие от первой теоремы ее нельзя сформулировать без помощи одного топологического понятия. Ее доказательство выявляет то своеобразное сочетание точных числовых выкладок и качественных геометрических соображений, которое так характерно для топологии. Обе теоремы имеют многочисленные приложения. Мы расскажем о тех из них, которые наиболее интересны с точки зрения топологии.

Первые сведения по топологии можно найти в работах Карла Вейерштрасса (60-е годы прошлого века), в которых он анализирует понятие *предела* функции (поскольку оно встречается в анализе). Он попытался реконструировать систему действительных чисел и обнаружил некоторые из ее свойств, ныне называемых «топологическими». Затем появились смелые исследования Георга Кантора по теории точечных множеств (1874—1895 г.); они подготовили фундамент, на котором в конце концов топология воздвигла свой собственный дом. Второму направлению топологии, называемому *комбинаторной* или *алгебраической* топологией, положили начало в 90-х годах прошлого столетия замечательные работы Анри Пуанкаре, посвященные интегральному исчислению для высших размерностей. *Теоретико-множественная* топология, представляющая первое направление, была поставлена на твердое основание Ф. Хаусдорфом и другими на протяжении первого десятилетия нашего века. Объединение комбинаторного и теоретико-множественного направлений топологии впервые было осуществлено Л. Э. Брауэром при изучении понятия размерности (1908—1912 г.). Существенное развитие объединенной теории было дано в период с 1915 по 1930 г. Д. У. Александером, П. С. Александровым, С. Лефшецом и другими. До 1930 г. топология называлась *analysis situs*. Первым, кто использовал и популяризовал термин *топология*, был Лефшец, опубликовавший в 1930 г. книгу под этим названием.

С 1930 г. топология двигалась ускоренными шагами. Чтобы это подтвердить, упомянем некоторые из ее достижений. Через теорию критических точек, развитую М. Морсом (Институт высших исследований, Принстон), она вторглась в вариационное исчисление. Работами Х. Уитни (Институт высших исследований, Принстон) по расслоенным пространствам, Ж. Де Рама (Лозанна) по дифференциальным формам и Г. Хопфа (Цюрих) по группам Ли она дала новый толчок дифференциальной геометрии. Развив новые основы алгебры и новую ее ветвь, называемую гомологической алгеброй, она вызвала целую революцию в современной алгебре. Многое здесь было сделано С. Эйленбергом (Колумбийский университет) и С. Маклейном (университет Чикаго). С помощью теории пучков и когомологий топология дала новые стимулы к жизни алгебраической геометрии, а в работах Ж. Лере (Париж) и М. Атьи (Оксфорд) она нашла важные приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Были найдены приложения топологии и к другим наукам за пределами математики, но почти все они осуществляются через посредство какой-либо промежуточной математической дисциплины. Например, изменения, внесенные топологией в дифференциальную геометрию, положили начало топологическим представлениям в теории относительности. Топология превратилась в один из основных объектов математики и фактически стала необходимостью для многих ее областей и объединяющей силой для почти всей математики.

Когда нематематик спрашивает тополога: «Что такое топология?», «Для чего она нужна?», последний оказывается в невыгодном положении. Спрашивающий ждет ответа, который можно дать на аналогичные вопросы относительно тригонометрии, вроде того, что тригонометрия имеет дело с определением углов и используется для решения задач в геодезии, навигации и астрономии. Но такого прямого ответа тополог дать не может. Он может с полным основанием сказать, что топология — это род геометрических соображений, полезных во многих областях современной математики. Однако это не удовлетворит того, кто хотел бы уловить суть предмета. Тогда тополог может принести сделанный из бумаги с помощью ножниц и клея лист Мёбиуса и разрезать его вдоль центральной линии или же он может взять веревку и показать, как можно, не связывая ее, образовать три отдельные петли. Если он почувствует прилив энергии, он может продемонстрировать, как снять пиджак, не снимая пальто. Каждый из этих домашних фокусов основан на серьезной математической идее, требующей для своего объяснения по крайней мере нескольких часов. Но показывать эти фокусы без соответствующего объяснения значило бы изображать карикатуру на топологию.

Чтобы оценить топологию по достоинству, необходимо стать на точку зрения математика и изучить некоторые из ее плодотворных приложений. Большинство этих приложений имеет то общее, что они встречаются при доказательстве *теорем существования.* Теорема существования — это теорема, утверждающая, что каждая из некоторого широкого класса задач имеет решение специального вида. Такие теоремы часто являются основными в рассматриваемом вопросе. Одна из главных наших целей — продемонстрировать силу и гибкость топологии при доказательстве теорем существования.

Теорема существования, которую мы докажем в части I, отвечает на вопрос: *когда уравнение вида $f(x)=y$ можно разрешить относительно x?* Здесь $f(x)$ обозначает функцию или формулу (например, $x^3-\sqrt{1+x^2}$), определенную для действительных чисел x в некотором замкнутом промежутке $[a, b]$ (например, $[2, 4]$), а y — некоторое действительное число (например, $33/2$). Вопрос состоит в следующем: существует ли в промежутке $[a, b]$ такое число x, что $f(x)=y$? В случае нашего примера он будет выглядеть так: найдется ли между 2 и 4 такое число x, что $x^3-\sqrt{1+x^2}=33/2$?

Подчеркнем, что мы не собираемся искать методы для нахождения значения или значений x в каких-либо конкретных случаях. Мы хотим вместо этого отыскать широкий критерий, применимый для каждой из многих различных задач и выясняющий, существует решение или нет. Если этот критерий гарантирует нам, что данная конкретная задача решение имеет, то мы можем приступить к нахождению этого решения, зная, что наши поиски не напрасны.

Критерий, даваемый нашей главной теоремой (сформулированной в § 1), требует понятия *непрерывности* функции (определенного в § 3). Доказательство этой теоремы (которое проводится в § 2—8) основано на двух топологических свойствах замкнутого промежутка $[a, b]$, называемых *компактностью* и *связностью*. Мы остановимся на этих понятиях очень подробно, потому что они играют в современной математике основную роль.

Главная теорема части II — это теорема существования, отвечающая на вопрос: *когда систему двух уравнений $f(x, y)=a$ и $g(x, y)=b$ можно разрешить относительно x и y*? Известным примером такой задачи служит система двух линейных уравнений

$$x-2y=3 \text{ и } 3x+y=5,$$

которую можно легко решить путем исключения неизвестных. Вот более трудная задача того же типа: найти пару чисел x и y, удовлетворяющих двум уравнениям

$$\frac{y \lg x}{1+x^2}=-\frac{1}{4} \text{ и } x+2y^3=10.$$

В частности, существует ли такое решение при условии, что x находится между $1/2$ и 1, а y — между -1 и 2? Так же как и раньше, мы ищем не набор методов, позволяющих найти решение, а скорее способ для определения, существует решение или нет.

Критерий, даваемый второй главной теоремой (сформулированной в § 18), требует понятия порядка замкнутой кривой на плоскости относительно точки, лежащей в этой плоскости. В доказательстве также широко используется аппарат части I, связанный с компактностью, связностью и непрерывностью.

Приложениями наших главных теорем служат теоремы о существовании нулей многочленов, неподвижных точек отображений и особенностей векторных полей.

В заключение будет нелишним сказать несколько слов о теоремах существования вообще. С тем, что они важны, немедленно соглашаются математики. Учащиеся на первых порах могут отнестись к ним несколько скептически. Причина этого состоит в том, что между методами, употребляемыми при доказательстве существования, и приемами для нахождения решения, которые учащимся приходится осваивать, имеется серьезный пробел. Доказательство существования должно быть применимым во всех случаях, какие только могут встретиться, поэтому оно трудно, а его методы в конкретных случаях имеют тенденцию становиться сложными и скучными. Большинство же случаев, с которыми имеет дело учащийся, относительно несложно и потому поддается значительно более простым методам.

Рассмотрим для примера задачу о нахождении нулей многочленов. Сначала учащийся изучает многочлены низкой степени с целыми коэффициентами, и их легко разложить на множители. В более трудных задачах он учится находить целочисленные корни, подставляя в уравнение делители свободного члена. Затем он знакомится с более сложным методом нахождения рациональных корней. Наконец, на случай отчаянных ситуаций он может научиться методу последовательных приближений, принадлежащему Горнеру. Трудности овладения этими методами достаточны, чтобы заставить его забыть общий вопрос о существовании или несуществовании того, что он ищет. Если ему напомнить об этом вопросе, он сразу отнесет его к числу метафизических.

То, что это вовсе не метафизический вопрос, станет ясным, если мы рассмотрим историю известных задач о трисекции угла и квадратуре круга. Со времен Евклида многие математики и нематематики пытались решить эти задачи, придумывая различные планы и проявляя чудеса изобретательности. Они неизменно подходили к этим задачам с молчаливым предположением, что решения существуют, и считали, что вопрос состоит лишь в том, как их найти. Количество усилий, затраченных при этих поисках, было грандиозным. И до второй половины прошлого века не нашлось никого, кто рассмотрел бы возможность, что решений этих задач вообще не существует. Вскоре после того, как это произошло, появилось и доказательство несуществования. Как только вопрос о существовании был в явной форме поставлен, он быстро получил ответ. В современных исследованиях вопросы существования ставятся прежде всего; ответы на них жизненно необходимы для того, чтобы соответствующие теории имели прочные основания.

Теоремы существования в одномерном случае

§ 1. Первая теорема существования

В этом параграфе мы сформулируем главную теорему существования части I. Ее доказательство будет по существу проведено в § 2—7 и завершено в § 8. Мы постепенно подготовим ее формулировку, рассмотрев несколько частных случаев. Напомним, что наша задача состоит в установлении критерия, который во многих случаях позволяет определить, можно ли решить уравнение вида $f(x)=y$, где y — заданное число. Чтобы увидеть, в какой форме можно было бы высказать этот критерий, изучим случаи, когда решать уравнение мы умеем.

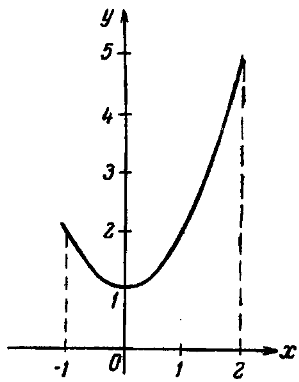


Рис. 1.1.

Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, определяемую формулой x^2+1 для значений x между —1 и +2. (Эта формула имеет смысл и для значений x, лежащих вне промежутка от —1 до 2, но мы не будем на это обращать внимания.) График этой функции изображен на рис. 1.1. Уравнение $y=x^2+1$ определяет параболу, и наш график является куском этой параболической кривой, расположенным между вертикальными прямыми $x=-1$ и $x=2$.

Заметим прежде всего, что на кривой имеется самая нижняя точка $x=0$, $y=1$. Точнее это можно сказать так: для всех x между —1 и 2 функция x^2+1 больше или равна 1 и имеет наименьшее значение 1 при $x=0$. Если теперь мы попытаемся отыскать самую высокую точку кривой для x между -1 и 2, то найдем, что ею будет точка $x=2$, $y=5$, если фразу «x между -1 и 2» понимать так, что конец $x=2$ входит в рассматриваемый промежуток. Если же этот конец в промежуток не включать, то на кривой самой высокой точки не будет. Действительно, какую бы точку на кривой с координатой x, меньшей, чем 2, мы ни взяли, всегда найдется и более высокая точка с координатой x, более близкой к 2. Чтобы исключить такую ситуацию, мы будем считать, что концы -1 и 2 входят в промежуток. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $-1\leqslant x\leqslant 2$, функция x^2+1 меньше или равна 5 и имеет наибольшее значение 5 при $x=2$.

Выясним теперь, существует ли решение уравнения $x^2+1=y$ (где y — заданное число), принадлежащее промежутку $[-1, 2]$. Если значение y превосходит максимум 5, то такого решения, конечно, нет. Так же обстоит дело и в случае, когда y меньше, чем минимум 1. Однако если y находится между 1 и 5, то интересующее нас решение существует. Мы можем увидеть это из графика. Проведем горизонтальную прямую над осью x на высоте y. Если прямая проведена слишком высоко или слишком низко, то она график не пересечет. Если высота лежит между 2 и 5, то прямая пересечет график в одной точке, а если высота лежит между 1 и 2, то прямая пересечет график в двух точках. (При $0\leqslant x\leqslant 2$ решение x выражается через y формулой $x=\sqrt{y-1}$, а при $-1\leqslant x\leqslant 0$ — соответственно $x=-\sqrt{y-1}$.)

В качестве второго примера рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую формулой

$$\frac{2x}{1+x^2} \text{ для } x, \text{ таких, что } -3\leqslant x\leqslant 3.$$

Ее график изображен на рис. 1.2. Если посмотреть на уравнение

$$y=\frac{2x}{1+x^2},$$

то легко видеть, что положительные значения x дают и положительные значения y, а отрицательные значения x — отрицательные значения y. Кроме того, изменение знака x приводит лишь к изменению знака y; поэтому график симметричен относительно начала координат. Самая высокая точка кривой будет при $x=1$, и тогда $y=1$. Чтобы в этом убедиться, преобразуем разность $1-f(x)$ следующим образом:

$$1-f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

Так как последнее выражение не может быть отрицательным, отсюда следует, что $1-f(x)\geqslant 0$ и $f(x)\leqslant 1$.

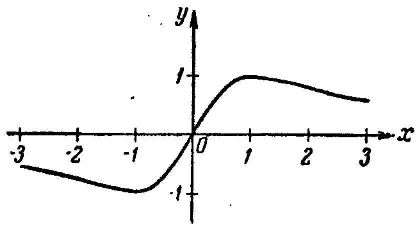


Рис. 1.2.

Ввиду симметрии самой низкой точкой кривой будет $x=-1$, $y=-1$. Поэтому очевидно, что уравнение $f(x)=y$ при $y>1$ и при $y<-1$ решений не имеет, но для каждого значения y, удовлетворяющего условию $-1\leqslant y\leqslant 1$, уравнение может быть решено. (Умножая обе части уравнения на x^2+1 и решая полученное квадратное уравнение, найдем $x=(1\pm\sqrt{1-y^2})/y$.)

Можно попытаться обобщить два рассмотренных примера и высказать предположение, что если $f(x)$ — любая функция, определенная для значений x, удовлетворяющих условию $a\leqslant x\leqslant b$, то у $f(x)$ есть наибольшее значение M и наименьшее значение m, и для значений y, таких, что $m\leqslant y\leqslant M$, уравнение имеет решение. Проверим это предположение еще на нескольких примерах. Будем при этом иметь в виду, что какой бы график мы ни нарисовали, он определит некоторую функцию.

Начертим графики нескольких функций. Если график $f(x)$ есть гладкая кривая вроде той, которая изображена на рис. 1.3, то предположение, по-видимому, верно. Горизонтальная прямая, проведенная на высоте y между m и M, должна кривую пересечь. Предположение все еще кажется правильным и в случае, когда кривая, как на рис. 1.4, имеет несколько угло-

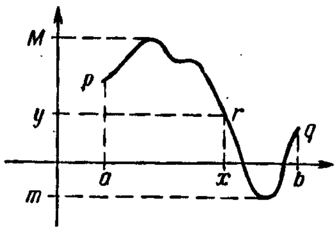


Рис. 1.3.

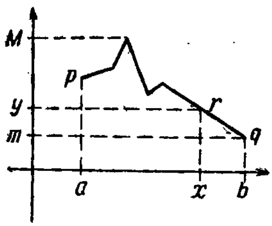


Рис. 1.4.

вых точек. Однако если у кривой есть разрыв, как на рис. 1.5, то предположение оказывается неверным, так как некоторые горизонтальные прямые проходят через разрыв, не пересекая графика. Функции, графики

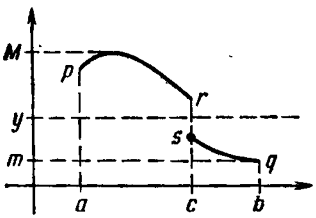


Рис. 1.5.

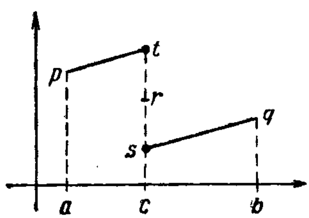


Рис. 1.6.

которых имеют такие разрывы, возникают в математике совершенно естественным образом. Они называются *разрывными* функциями. График такой функции может даже не иметь самой высокой или самой низкой точки, как в примере на рис. 1.6, где в точке $x=c$ график имеет разрыв, а значение $f(c)=r$.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать главную теорему.

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел x в некотором замкнутом про-*

межутке $[a, b]$, принимает действительные значения и непрерывна, то у этой функции существуют наименьшее значение m и наибольшее значение M и для каждого значения y в замкнутом промежутке $[m, M]$ уравнение $f(x)=y$ имеет по крайней мере одно решение x, принадлежащее промежутку $[a, b]$.

Эту теорему иногда сокращенно формулируют так: если действительная функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то она имеет наименьшее и наибольшее значение и принимает все промежуточные значения.

Выражение «замкнутый промежуток» означает, что концы a и b промежутка в него входят, т. е. что x содержится в границах $a \leqslant x \leqslant b$. Выражение «открытый промежуток» означает, что концы в промежуток не входят. Замкнутый промежуток мы будем обозначать символом $[a, b]$, а открытый — символом (a, b). «Полуоткрытый» промежуток содержит лишь один из своих концов; так $(a, b]$ означает, что $a < x \leqslant b$, а $[a, b)$ означает, что $a \leqslant x < b$.

Как эта теорема может помочь нам выяснить, имеет ли уравнение $f(x)=y$ решение при заданном y в случае какой-либо конкретной функции $f(x)$, если известно, что она непрерывна? Если мы сумеем определить минимум m и максимум M функции $f(x)$, то нам нужно будет только узнать, выполняются ли неравенства $m \leqslant y \leqslant M$. Во многих случаях может оказаться трудным найти m и M. Однако обычно нетрудно вычислить несколько значений функции. Если для некоторого значения $x=c$ мы получим, что $f(c)<y$, а для другого значения $x=d$, что $y<f(d)$, то теорема утверждает, что в промежутке $[c, d]$ (или $[d, c]$, если $d<c$) существует такое x, что $f(x)=y$. Например, если $f(x)=x^3-\sqrt{1+4x}$, то мы имеем $f(0)=-1$ и $f(2)=5$. Следовательно, уравнение $x^3-\sqrt{1+4x}=2$ имеет решение в промежутке $[0, 2]$.

Следует подчеркнуть, что важность теоремы определяется ее общностью. Она показывает, что мы можем рассчитывать на решение уравнения при самых различных обстоятельствах. Во многих частных случаях, например когда $f(x)=x^2+1$, теорема бесполезна, потому что даваемые ею сведения и без того очевидны. Теорема обнаруживает свою силу, как только она применяется к более сложным функциям. Но еще важнее, что она является первой теоремой в общей теории непрерывных функций.

Заметим также, что наша формулировка теоремы является неполной. Мы точно не определили, что понимается под непрерывностью функции $f(x)$, и дали лишь интуитивное описание этого понятия, основанное на геометрической картине, — график функции $f(x)$ есть кривая без разрывов, — но это лишь замена одного неопределенного термина другим. Следующие два параграфа приведут нас к точному определению непрерывности.

Упражнения

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=4+2x-x^2$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant 3$. Для каких значений y на этом промежутке нет соответствующих значений x? Для каких значений y на этом промежутке существует только одно значение x? Два значения?
2. Функция $f(x)=x^3-5$ при $x=1$ принимает значение -4, а при $x=2$ — значение 3 и непрерывна на промежутке $1\leqslant x\leqslant 2$. Как с помощью теоремы показать, что $\sqrt[3]{5}$ лежит между 1 и 2?
3. Между какими двумя положительными целыми числами лежит нуль многочлена x^2-2x-4?
4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=1/x$ в промежутке $0<x\leqslant 5$.
5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=3$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant 7$.
6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x$ в промежутке $0\leqslant x<5$.

§ 2. Множества и функции

В этой книге мы в первую очередь будем интересоваться геометрическими конфигурациями. Они являются подмножествами евклидовой прямой, плоскости или пространства. Для удобства мы будем предполагать, что на прямой, плоскости или в пространстве введены декартовы координаты, так что каждая точка x определяется своими координатами, образующими упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, $n=2$ в случае плоскости, $n=3$ для трехмерного пространства и $n=1$ для прямой. Множество всех действительных чисел мы будем обозначать буквой R, а множество всех наборов из n действительных чисел — символом R^n. Мы будем представлять их себе геометрически, так что $R=R^1$ есть действительная прямая (прямая с системой координат), R^2 — плоскость с системой координат и R^3 — трехмерное пространство с системой координат.

Из программы, намеченной во введении и в предыдущем параграфе, можно видеть, что мы будем главным образом заниматься изучением функций. Слово «функция» будет пониматься в несколько более широком смысле, чем в некоторых элементарных книгах; насколько велика степень общности этого понятия, будет видно из определения, которое мы дадим ниже. Мы будем пользоваться обычным языком и обозначениями теории множеств. Из этого словаря нам потребуется лишь немного терминов, но те из них, с которыми мы будем иметь дело, будут встречаться довольно часто. Сейчас мы введем нужные нам термины и обозначения.

Если X — некоторое множество, то пишут $x \in X$, если x — элемент множества X. Если A и X — множества, то $A \subset X$ (словами: A содержится в X), когда каждый элемент множества A является элементом и множества X; в этом случае A называется *подмножеством* множества X. Мы будем в основном иметь дело с подмножествами прямой, плоскости или пространства (т. е. $X \subset R^n$ для некоторого натурального n), и по этой причине элементы множества X часто будем называть точками. Если $A \subset X$ и $B \subset X$, то *пересечение* $A \cap B$ этих множеств состоит из всех точек, принадлежащих и A, и B, а их *объединение* $A \cup B$ состоит из всех точек, принадлежащих A, или B, или A и B. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$; оно содержится в любом множестве. Таким образом, соотношение $A \cap B = \varnothing$ означает, что A и B не имеют общих точек. Если $A \subset X$, то *дополнение* множества

A в X, обозначаемое символом $X - A$, состоит из всех точек множества X, не принадлежащих A.

В современной математике слово функция употребляется в чрезвычайно широком смысле; фактически оно оказывается основным понятием всей математики. Вот наиболее общее определение.

Определение. *Функция* (или *отображение*) f состоит из трех объектов: множества X, называемого *областью* ее *определения*, множества Y, которому принадлежат ее значения, и правила, ставящего каждому элементу множества X в соответствие некоторый элемент множества Y. Обозначение $f: X \to Y$ читается так: «f есть функция с областью определения X, принимающая значения в Y», или короче: «f есть функция, отображающая X в Y». Если $x \in X$, то фразу «элементу x функция f ставит в соответствие элемент $y \in Y$» коротко записывают в виде $y = fx$ (как это теперь часто делают, мы опускаем скобки в $f(x)$). В случае когда Y есть в точности множество всех значений fx для $x \in X$, мы говорим, что f есть функция, отображающая X на Y.

Например, в анализе под функцией обычно понимают действительную функцию действительной переменной, т. е. область ее определения и множество ее значений являются подмножествами R. Кроме того, часто предполагается, что функция задается какой-либо формулой, скажем $\sqrt{1-x}$. В таком случае обычно не указывают ни области ее определения, ни множества, которому принадлежат ее значения. Молчаливо подразумевается, что областью определения X функции служит множество всех тех действительных чисел, для которых формула имеет смысл (например, функция $\sqrt{1-x}$ определена при всех $x \leqslant 1$, включая отрицательные числа). В качестве Y часто берут в точности множество всех значений функции (например, для $\sqrt{1-x}$ это множество всех $y \geqslant 0$). Функции такого типа мы будем называть *числовыми* функциями.

При более серьезных исследованиях нельзя предполагать, что f задается формулой, из которой можно найти область определения X и множество значений Y. Кроме того, мы не хотим, чтобы X и Y непременно были подмножествами R. В этой книге X и Y обычно будут подмножествами евклидовых пространств, быть может, разных размерностей: $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$. Таким образом, для каждой рассматриваемой функции непременно должны быть указаны и X, и Y. При этом мы не всегда будем предполагать, что Y есть само множество значений функции: Y может быть и больше. Рассмотрим сначала несколько хорошо знакомых примеров геометрически определенных функций.

Параллельный перенос плоскости есть функция f: $R^2 \to R^2$. Она определяется как результат поступательного движения плоскости, рассматриваемой как твердое тело, при котором каждая точка пробегает прямолинейный отрезок или вектор; все векторы, являющиеся траекториями различных точек, параллельны и имеют одну и ту же длину и одно и то же направление. Перенос задается таким вектором для какой-либо одной точки, потому что все другие векторы можно по нему построить. Так, если мы знаем, что f переводит точку p в точку q, то f будет переводить точку p' в такую точку q', что точки p, q, p', q' будут составлять параллелограмм. Например, если f переводит начало $(0, 0)$ в точку $(2, -3)$, то f переводит (x_1, x_2) в точку (x_1+2, x_2-3). Следовательно, функция f задается формулами $y_1 = x_1+2$ и $y_2 = x_2-3$.

Вращение плоскости есть функция f: $R^2 \to R^2$, которая также определяется как результат движения плоскости, рассматриваемой как твердое тело, но на этот раз — вращения ее вокруг неподвижной точки z, называемой центром вращения. Каждая окружность с центром z переводится функцией f в себя, а каждый луч (полупрямая, включающая начальную точку), выходящий из z, переводится в другой луч. Угол, образованный этими двумя лучами, называется углом вращения, и его величина не зависит от исходного луча. Вращение задается центром и углом поворота.

Отражение относительно прямой L в R^2 есть функция f: $R^2 \to R^2$. Она оставляет неподвижной каждую точку прямой L и меняет местами две полуплоскости, на которые L разбивает плоскость. Проще всего представлять себе отражение как результат вращения плоскости в пространстве вокруг прямой L на 180°.

Можно показать, что любое движение плоскости, рассматриваемой как твердое тело, которое переводит эту плоскость в себя, есть параллельный перенос, вращение, отражение или отражение вместе с следующим за ним параллельным переносом. Форма и размеры фигур на плоскости при этом не меняются; могут измениться лишь их положение и ориентация. Эти функции представляют *движения*, рассматриваемые в элементарной геометрии.

Подобие плоскости есть функция f: $R^2 \to R^2$, изменяющая все длины в одно и то же число раз r. Например, выберем точку $z \in R^2$, положим $fz = z$, а для каждой другой точки $x \neq z$ в качестве fx возьмем конец отрезка (или вектора), начинающегося в z, имеющего то же направление, что и отрезок, идущий из z в x, и удвоенную длину. Такая функция f увеличивает все длины в два раза. Такого рода функция f при $r > 1$ называется *растяжением*, а при $r < 1$ — *сжатием* с центром z. Подобие с $r = 1$ есть одно из движений, описанных выше. Подобие при $r \neq 1$ всегда имеет неподвижную точку z и является результатом сжатия или растяжения с центром z, за которым следует вращение вокруг z или отражение относительно некоторой прямой, проходящей через z. Подобие всегда переводит прямые линии в прямые линии и не меняет величины углов между ними. Оно может изменить размеры, положение и ориентацию произвольной фигуры, но не может изменить ее формы.

Пусть L — какая-либо прямая в плоскости R^2. *Ортогональная проекция* f: $R^2 \to L$ каждой точке $x \in R^2$ ставит в соответствие основание fx перпендикуляра, опущенного из x на L.

Пусть S — сфера в R^3 с центром z. *Радиальная проекция* f: $R^3 - z \to S$ каждой точке $x \in R^3$, отличной от z, ставит в соответствие точку fx, в которой луч, идущий из z через x, пересекает S.

Приведенные примеры отчасти показывают, какого рода функции будут нас интересовать. Чтобы легче было описывать такие функции и делать относительно них разумные утверждения, пользуются понятиями образа и прообраза. Если f: $X \to Y$ и $A \subset X$, то *образ* множества A при отображении (или функции) f есть множество fA, ко-

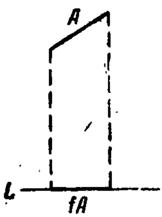


Рис. 2.1.

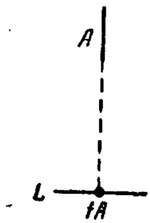


Рис. 2.2.

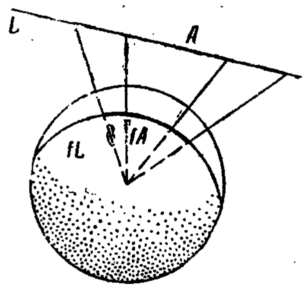


Рис. 2.3.

торое состоит из значений $fx \in Y$ для всех $x \in A$. Точнее, произвольная точка $y \in Y$ принадлежит fA, если существует хотя бы одна такая точка $x \in A$, что $fx = y$. Образ fA можно представлять себе как результат применения функции f ко всему множеству A. Например, при движении или подобии f: $R^2 \to R^2$ любая прямая L в R^2 имеет своим образом некоторую прямую fL в R^2. При ортогональной проекции f: $R^2 \to L$ каждый прямолинейный отрезок A в R^2 имеет своим образом fA некоторый отрезок прямой L (см. рис. 2.1) или в том случае, когда отрезок A перпендикулярен L, просто точку на L (рис. 2.2). При радиальной проекции f: $R^3 - z \to S$ образ fL любой прямой L в R^3, не проходящей через z, есть половина большого круга сферы S без концов (см. рис. 2.3).

Если f: $X \to Y$ и $B \subset Y$, то *прообраз* множества B при отображении f есть обозначаемое символом $f^{-1}B$ множество, состоящее из всех точек $x \in X$, для которых $fx \in B$. Прообраз точки y при ортогональной проекции $R^2 \to L$ есть прямая, перпендикулярная L в точке y, а прообраз отрезка — полоса, ограниченная двумя прямыми, перпендикулярными L в концах этого отрезка. Прообраз точки $y \in S$ при радиальной проекции $R^3 - z \to S$ есть луч с вершиной z, проходящий через y, причем точка z из него исключается. Прообраз области в S, ограниченной окружностью, есть конус без вершины.

Пусть f: $X \to Y$, и пусть A — некоторое подмножество множества X. Тогда образ множества A содержится в Y. Если B — какое-либо подмножество Y, содержащее fA, то функция g: $A \to B$, определяемая для всех $x \in A$ условием $gx = fx$, называется *сужением* функции f на A и B. Чаще нам придется сужать только область определения функции f, и в этом случае сужение функции f на A и Y обозначается символом $f|A$ (читается: сужение функции f на A). Например, если f: $R^2 \to R^2$ — параллельный перенос и L — прямая в R^2, то сужение $f|L$ переводит L в некоторую параллельную прямую.

Если мы имеем две функции f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$, то из них можно составить новую функцию, обозначаемую символом gf: $X \to Z$. Эта функция, называемая *композицией* функций f и g, каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $g(fx) \in Z$. Пусть, например, f и g — параллельные переносы $R^2 \to R^2$, причем f переводит каждую точку на 2 единицы к востоку (т. е. вправо), а g переводит каждую точку на 2 единицы к северу (т. е. вверх). Тогда gf есть параллельный перенос, переводящий каждую точку на $2\sqrt{2}$ единиц к северо-востоку. Рассмотрим еще один пример. Пусть f и g — числовые функции $R \to R$, определяемые формулами

$$fx = x^2 + 1, \quad gx = 2 - x.$$

Тогда можно составить две композиции gf и fg, которые задаются следующими формулами:

$$gfx = g(fx) = 2 - (x^2 + 1) = 1 - x^2,$$
$$fgx = f(gx) = (2 - x)^2 + 1 = 5 - 4x + x^2.$$

Некоторые функции так незаметны, что нужно напомнить об их существовании. Прежде всего обратим внимание на *постоянные* функции: функция $f\colon X \to Y$ называется постоянной, если образ fX состоит из одной точки множества Y. Каждой точке $y \in Y$ соответствует своя постоянная функция. Затем упомянем *тождественные* функции: для каждого множества X тождественной функцией этого множества называется функция $f\colon X \to X$, такая, что $fx = x$ для каждого $x \in X$. Наконец, если $A \subset X$, то функция $f\colon A \to X$, определяемая равенством $fx = x$ для каждого $x \in A$, называется *вложением*. Очевидно, вложение множества A в X есть сужение тождественной функции множества X на A. Любое сужение постоянной функции есть постоянная функция.

Функция $f\colon X \to Y$ называется *взаимно однозначной* (сокращенно: 1-1 функцией), если каждая точка множества Y является образом при f одной и только одной точки множества X[1]). В этом случае функция, ставящая каждой точке $y \in Y$ в соответствие единственную точку $x \in X$, для которой $fx = y$, называется *обратной* функцией для функции f и обозначается символом $f^{-1}\colon Y \to X$. Например, каждое движение плоскости взаимно однозначно. Если f — параллельный перенос, задаваемый прямолинейным отрезком, идущим из p в q, то f^{-1} есть параллельный перенос, задаваемый прямолинейным отрезком, идущим из q в p. Функция, обратная вращению, является вращением с тем же центром и с углом, равным по величине, но противоположным по знаку. Подобие плоскости взаимно однозначно. Отображение, обратное растяжению с коэффициентом $r > 1$, есть сжатие с коэффициентом $1/r$ и с тем же центром.

Если функция задается формулой, то обычно пытаются, разрешая уравнение $y = fx$ относительно x,

---

[1]) Некоторые авторы называют функцию $f\colon X \to Y$ взаимно однозначной, если каждая точка $y \in Y$ является образом не более одной точки из X, допуская при этом, что fX может и не совпадать со всем множеством Y; в случае когда $fX = Y$, они говорят, что f есть взаимно однозначная функция, отображающая X *на* Y.

найти формулу и для обратной функции. Так, квадратный корень есть функция, обратная квадрату, а логарифмическая функция обратна показательной. Чтобы получить 1-1 функцию в случае, когда прообразы некоторых точек состоят не из одной точки, рассматривают сужение данной функции f на подходящем подмножестве. Например, если $fx=x^2$, то из уравнения $y=x^2$ находим $x=\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$. Но если мы сузим область определения функции f, рассматривая ее только на множестве A неотрицательных чисел, то множество значений функции не изменится, а суженная функция g будет взаимно однозначной, и обратная к ней функция будет обычным квадратным корнем $g^{-1}y=\sqrt{y}$. Для того чтобы получить 1-1 функцию в случае показательной функции $fx=10^x$, достаточно, оставив без изменения область определения X этой функции (т. е. множество всех действительных чисел), сузить лишь множество Y, в которое она множество X отображает, именно вместо множества всех действительных чисел нужно взять множество всех положительных чисел.

Хотя наши примеры функций были довольно разнообразны, из них еще не видно, насколько широким и общим является понятие функции. В качестве примера функции в таком широком смысле рассмотрим понятие «матери мальчика». Область ее определения X есть множество всех мальчиков, а множество Y — множество всех женщин, и каждому мальчику x она ставит в соответствие женщину fx, являющуюся его матерью. Такого рода примеры встречаются нам на каждом шагу: цвет книги, крыша дома и т. д. Вообще, когда рядом стоят два существительных, причем второе из них в родительном падеже, мы нередко имеем дело с функцией.

В науке функции вездесущи. Результат химической реакции есть функция от всех участвующих в реакции веществ. Результат физического эксперимента является функцией от условий, поставленных экспериментатором.

Возвратимся к математике. Имеются примеры выражений вида «что-то чего-то», встречающиеся всюду:

площадь круга, середина прямолинейного отрезка, биссектриса угла, объединение двух множеств и т. д. Каждое из них определяет функцию. В случае объединения двух множеств элемент области определения функции есть *пара* (A, B) подмножеств данного множества X, а множество значений функции есть множество всех подмножеств X.

Многие функции можно изобразить геометрически. Например, сумма двух чисел $x+y$ есть функция $f: R^2 \to R^1$, которую можно представить себе как проекцию плоскости на некоторую прямую. Каждую пару чисел (x, y) будем рассматривать как точку в R^2. Прообраз $f^{-1}3$ есть прямая с уравнением $x+y=3$. Прообразы всех чисел образуют семейство прямых, параллельных этой прямой (рис. 2.4). Если мы изобразим множество значений R^1 функции f как прямую, пересекающую это семейство под прямым углом, то f можно рассматривать как ортогональную проекцию на эту прямую.

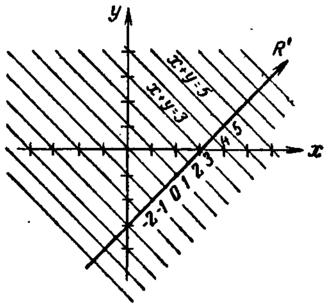


Рис. 2.4.

Упражнения

1. Показать, что если A, B и C — подмножества множества X, то

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

и проиллюстрировать этот результат диаграммой множеств в R^2.

2. Показать, что если A и B — подмножества X, то

$$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B).$$

3. Показать, что если A и B — подмножества X и $A \subset B$, то

$$A \cap (X - B) = \varnothing.$$

4. Доказать следующие свойства образов при $f: X \to Y$:

a) если A и B — произвольные подмножества X, то

$$f(A \cup B) = fA \cup fB,$$

b) $f(A \cap B) \subset fA \cap fB$,

c) если $A \subset B \subset X$, то $fA \subset fB$.

5. Стереографической проекцией из северного полюса называется функция f, областью определения X которой служит сфера без северного полюса, а множеством значений Y — плоскость, параллельная экватору и не проходящая через северный полюс. Каждой точке x сферы (не считая северного полюса) функция f ставит в сответствие точку y, в которой луч, идущий из северного полюса через x, пересекает плоскость Y (см. рис. 2.5). Будем считать, что плоскость Y касается сферы в ее южном полюсе S.

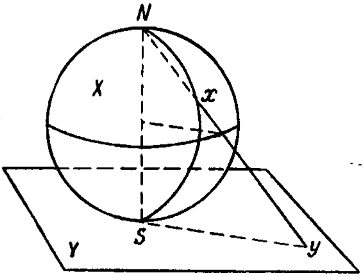


Рис. 2.5.

   a) Описать образ произвольной параллели сферы.
   b) Описать образ любого меридиана сферы.
   c) Найти прообраз любого прямолинейного отрезка в Y.
   d) Образ экватора есть некоторая окружность на плоскости. Как связаны радиус этой окружности и радиус сферы?
   e) Какое множество служит прообразом произвольного луча с вершиной в южном полюсе?
6. Пусть f — параллельный перенос $R^2 \to R^2$, задаваемый формулами $y_1 = x_1 + 3$, $y_2 = x_2 - 4$, и g — отражение, задаваемое формулами $y_1 = -x_1$ и $y_2 = x_2$. Найти формулы для композиций gf и fg, обратных функций f^{-1}, g^{-1} и $(gf)^{-1}$, композиций $f^{-1}g^{-1}$ и $g^{-1}f^{-1}$. Верно ли, что $(gf)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$?
7. Пусть задана некоторая функция $f: X \to Y$.
   a) Доказать, что если A и B — подмножества Y, то

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}A \cup f^{-1}B \text{ и } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}A \cap f^{-1}B.$$

   b) Найти $f^{-1}Y$ и $f^{-1}\varnothing$.
   c) Как связаны прообразы $f^{-1}A$ и $f^{-1}B$, если $A \subset B$?
8. Показать, что если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то для каждого подмножества $C \subset Z$ выполняется равенство $(gf)^{-1}C = f^{-1}(g^{-1}C)$. Показать, что если f и g взаимно однозначны, то взаимно однозначна и композиция gf и $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

§ 3. Окрестности и непрерывность

Если x и y — две точки в R^n, то под *расстоянием* от x до y понимается длина прямолинейного отрезка, соединяющего эти две точки. Оно обозначается символом $d(x, y)$ и, если известны координаты x и y, может быть вычислено по следующей формуле, основанной на обобщении теоремы Пифагора:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

В случае $n = 1$ эта формула принимает вид $d(x, y) = |x - y|$ (абсолютная величина разности $x - y$). В действительности мы будем пользоваться не самой этой формулой, а только некоторыми свойствами функции расстояния, которые можно доказать с ее помощью. Эти свойства широко известны, и мы перечислим их сейчас без доказательства.

Во-первых, если x и y — различные точки, то $d(x, y) > 0$. Во-вторых, $d(x, x) = 0$ для всех x. Далее, для любой пары точек x, y расстояние симметрично: $d(x, y) = d(y, x)$. Наконец, для любых трех точек x, y, z имеем

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Это неравенство называется «неравенством треугольника», поскольку оно утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника не меньше длины третьей его стороны.

Когда мы в § 1 рассматривали различные графики функций, для нашего заключения было очень важно, имеет данный график какие-либо разрывы или нет; именно по этой причине главная теорема требует, чтобы функция была непрерывна. Интуитивное описание непрерывности опиралось на геометрические картинки; точное ее определение будет дано с помощью еще одного понятия, которое мы сейчас введем, — понятия окрестности.

Определение. Пусть X — множество в R^n, x — точка множества X и r — некоторое положительное число. Тогда *окрестностью* радиуса r точки x в множестве X называется множество всех точек из X, расстояние которых от x меньше r. Такая окрестность обозначается символом $N(x, r, X)$ или, если известно о каком множестве X идет речь, короче — символом $N(x, r)$.

Если, например, $X=R^n$ и $n=2$, то $N(x, r, R^2)$ есть внутренность круга с центром x и радиусом r. Точно так же окрестность $N(x,r,R^3)$ радиуса r точки x в R^3 есть внутренность шара в центром x и радиусом r. В случае $n=1$ окрестность $N(x,r,R)$ есть открытый промежуток $(x-r, x+r)$ с центром x длины $2r$. Если X не совпадает со всем пространством R^n, то окрестность $N(x,r,X)$ есть в точности та часть множества X, которая лежит внутри $N(x,r,R^n)$ (рис. 3.1). Она является пересечением множества X с указанной окрестностью в R^n:

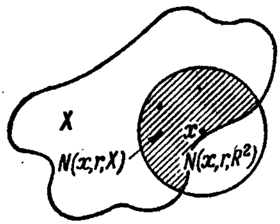


Рис. 3.1.

$$N(x, r, X)=X\cap N(x, r, R^n).$$

Перейдем теперь к важному понятию непрерывности функции.

Определение. Пусть $f: X\to Y$ — функция, где $X\subset R^m$ и $Y\subset R^n$, и пусть $x\in X$. Мы будем говорить, что функция f *непрерывна в точке* x, если для каждой окрестности точки fx в Y существует такая окрестность точки x в X, образ которой при f содержится в рассматриваемой окрестности точки fx.

Чтобы выразить это условие короче, обозначим, как это обычно делают в анализе, радиусы этих окрестностей буквами ε и δ. Тогда требование в определении можно иначе сформулировать так: для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что

$$fN(x, \delta, X)\subset N(fx, \varepsilon, Y).$$

Мы будем говорить, что функция f *непрерывна*, если она непрерывна в каждой точке множества X[1]).

---

[1]) В оригинале авторы называют «отображением» (*mapping*) только любую непрерывную функцию. В переводе слово отображение, как это обычно принято, понимается как синоним слова функция, а непрерывное отображение — это непрерывная функция. — *Прим. перев.*

Если δ и ε мы будем понимать как меру близости, то это определение можно перефразировать так: требуя, чтобы точка x' была достаточно близка к x, можно сделать точку fx' сколь угодно близкой к fx. Еще проще это можно сказать и так: малое измененние x вызывает малое изменение fx.

В топологии нас в первую очередь интересуют непрерывные функции, или непрерывные отображения. Так, например, стереографическая проекция есть непрерывное отображение сферы без северного полюса

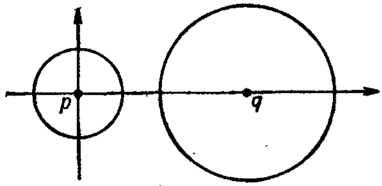


Рис. 3.2.

на плоскость. Однако, чтобы проиллюстрировать, какой смысл имеет определение непрерывности, разберем несколько примеров разрывных функций.

В качестве первого примера рассмотрим функцию $f\colon R^2 \to R^2$, оставляющую неподвижной каждую точку плоскости за исключением одной точки, скажем p, и пусть $fp=q$ — некоторая другая точка. Чтобы пример был конкретным, можно в качестве p взять начало координат $(0, 0)$, а в качестве q — точку $(1, 0)$. Тогда функция f будет непрерывна во всех точках, кроме p. Чтобы убедиться в том, что функция f в точке p не является непрерывной, возьмем ε, равное половине расстояния $d(p, q)$, так что окрестность $N(q, \varepsilon) = N(q, 1/2)$ есть виутреиность круга радиуса $1/2$ с центром $(1, 0)$ (рис. 3.2). Тогда ни одна из окрестностей точки p не отображается в $N(q, 1/2)$. Действительно, каждая окрестность точки p содержит точки, не принадлежащие $N(q, 1/2)$ и отличные от p, и так как f оставляет эти точки неподвижными, то и их образы не принадлежат $N(q, 1/2)$. (На рис. 3.2 изображена окрестность $N(p, 1/4)$; среди ее точек лишь p

имеет образ fp в $N(q, 1/2)$.) Поскольку для $\varepsilon=1/2$ не существует такого соответствующего $\delta>0$, что $fN(p, \delta) \subset N(q, 1/2)$, функция f не является непрерывной в точке p. Наглядная геометрическая картина состоит в том, что f вырывает точку p из плоскости и затем приклеивает ее к q.

Второй наш пример демонстрирует несколько другой тип разрывности. Разобьем плоскость R^2 на две полуплоскости A и B, где A включает все точки (x_1, x_2), у которых $x_1 \geqslant 0$, а B есть ее дополнение. Отметим, что вертикальная прямая L, для точек которой

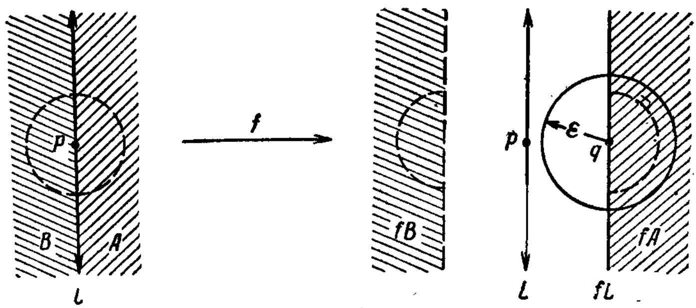


Рис. 3.3.

$x_1=0$, входит в A (рис. 3.3). Определим f как функцию $R^2 \to R^2$, такую, что ее сужение на A есть параллельный перенос на одну единицу вправо, а $f|B$—параллельный перенос на одну единицу влево. Две наши полуплоскости при этом отделяются; одна из них перемещается вправо, а другая — влево. Так как $L \subset A$, прямая L перемещается вправо. Функция непрерывна в каждой точке, не принадлежащей L, и разрывна в каждой точке L. Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим точку $p \in L$. Пусть $q=fp$ и ε — произвольное положительное число, меньшее, чем 2. Тогда окрестность точки q в R^2 радиуса ε, а именно $N(q, \varepsilon)$, не содержит ни одной точки образа fB, а каждая окрестность $N(p, r)$ содержит точки из B. Как показано на рис. 3.3, левая половина любой окрестности точки p (ограниченной пунктирной окружностью) отрывается функцией f от $N(q, \varepsilon)$. Поэтому не существует ни одного такого δ, чтобы образ окрестности точки p в R^2 радиуса δ содержался в окрестности точки q радиуса ε, т. е. такого, что

$$fN(p, \delta) \subset N(q, \varepsilon).$$

Наглядная картина состоит в том, что f разрывает плоскость вдоль L и отделяет обе ее половины.

Чтобы убедиться в том, что определение непрерывности согласуется с нашим интуитивным представлением, можно еще проверить его на примерах разрывов графиков, изображенных в § 1. Если радиус ε окрестности $N(r, \varepsilon)$ на рис. 1.5 меньше, чем половина расстояния $d(r, s)$, то любая окрестность точки c содержит точки множества X, образы которых не лежат в этой ε-окрестности точки $fc=r$. Точно так же если ε на рис. 1.6 меньше, чем меньшее из расстояний $d(r, s)$ и $d(r, t)$, то любая окрестность точки c снова содержит точки, образы которых не принадлежат окрестности точки $fc=r$ радиуса ε.

Чтобы доказать, что функция имеет в некоторой точке разрыв, нужно только указать хотя бы одно такое $\varepsilon>0$, для которого не существует никакого δ. Доказать непрерывность часто бывает труднее, потому что в этом случае требуется показать, как найти соответствующее число δ для любого возможного выбора числа ε (т. е. надо найти δ как функцию от ε). Однако существует большое число простых функций, для которых это сделать не трудно, и мы их сейчас рассмотрим.

Для любого $X \subset R^n$ тождественная функция $f: X \to X$ непрерывна. Напомним, что $fx=x$ для всех $x \in X$. Для любой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon>0$ возьмем $\delta=\varepsilon$. Поскольку функция f оставляет все точки неподвижными, окрестности $N(x, \delta, X)$ и $N(fx, \varepsilon, X)$ тогда совпадают, и значит f отображает первую из них во вторую. Аналогично, если $A \subset X$, то функция вложения $f: A \to X$ непрерывна. И здесь нужно взять $\delta=\varepsilon$ и воспользоваться тем фактом, что $N(x, \delta, A) = A \cap N(x, \delta, X)$.

Любая постоянная функция f: $X \to Y$ непрерывна. В этом случае fX состоит из единственной точки, скажем q, множества Y. Поэтому для всякой точки x и любых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ образ $fN(x, r, X) \subset N(q, \varepsilon, Y)$, так что мы можем, например, взять $\delta = \varepsilon$.

Любая жесткая функция f: $X \to Y$ непрерывна. Под жесткой функцией мы понимаем функцию, не меняющую расстояний:

$$d(fx, fx') = d(x, x') \text{ для всех } x, x' \in X.$$

Например, жесткими функциями являются параллельные переносы, вращения и отражения в R^2. Чтобы доказать непрерывность функции f в точке $x \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$. Если $x' \in N(x, \delta, X)$, то $d(x, x') < \varepsilon$; следовательно, $d(fx, fx') < \varepsilon$ и, значит, $fx' \in N(fx, \varepsilon, Y)$. Иными словами, ввиду жесткости функции f ε-окрестность точки x переводится ею в ε-окрестность точки fx.

Любая сжимающая или не увеличивающая всех расстояний функция f: $X \to Y$ непрерывна. Это требование выражается условием

$$d(fx, fx') \leqslant d(x, x') \text{ для всех } x, x' \in X.$$

И в этом случае для всех x мы берем $\delta = \varepsilon$ и применяем рассуждение предыдущего абзаца.

Любая функция подобия f: $X \to Y$ непрерывна. В этом случае все расстояния умножаются на один и тот же общий множитель, скажем k; иными словами, выполняется условие

$$d(fx, fx') = k\, d(x, x') \text{ для всех } x, x' \in X.$$

Если $0 \leqslant k \leqslant 1$, то f — сжимающая функция, и утверждение очевидно. Если $k > 1$, то для всех точек x возьмем $\delta = \varepsilon / k$. Тогда из того, что $x' \in N(x, \varepsilon/k, X)$, следует, что $d(x, x') < \varepsilon/k$. Это условие можно переписать в виде $k\, d(x, x') < \varepsilon$. Написанное выше равенство дает $d(fx, fx') < \varepsilon$, откуда $fx' \in N(fx, \varepsilon, Y)$. Например, если $k = 2$ и f удваивает расстояния, то окрестность точки x, радиус которой равен половине радиуса окрестности $N(fx, \varepsilon, Y)$, переводится функцией f в $N(fx, \varepsilon, Y)$.

Радиальная проекция на сферу S из ее центра z непрерывна как функция f: $(R^3 - z) \to S$. Две точки, лежащие вне сферы S, при проектировании попадают на сферу, и f уменьшает расстояние между ними, так что очевидно, что сужение функции f на множестве точек, лежащих вне сферы, непрерывно. Однако сужение функции f на множестве точек, лежащих внутри сферы, расстояния увеличивает; проекция на S увеличивает расстояние между любой парой точек все больше и больше по мере того, как эти точки приближаются к центру z. Выражение для δ как функции от ε, нужное для доказательства непрерывности функции f в точке x, довольно сложно, но тем не менее его можно получить, рассматривая подобные треугольники и немножко применяя алгебру (см. упражнение 9). Геометрически мы можем найти δ следующим образом. Пусть t — точка пересечения сферы S и сферы с центром fx и радиусом ε. На рис. 3.4 изображено сечение сферы S плоскостью, проходящей через три точки z, fx и t. Пусть δ — расстояние от точки x до прямой zt. Тогда каждая точка, лежащая внутри шара $N(x, \delta)$, проектируется в $N(fx, \varepsilon, S)$.

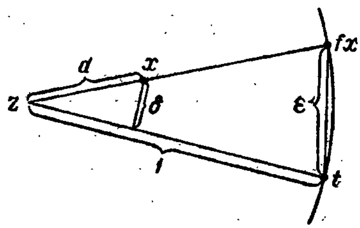


Рис. 3.4.

Упражнения

1. Для каких троек точек x, y, z неравенство треугольника превращается в равенство, т. е.

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)?$$

2. Показать, что если x' — точка окрестности $N(x, r, X)$, то существует такое $r' > 0$, что

$$N(x', r', X) \subset N(x, r, X).$$

Каково наибольшее значение r', гарантирующее это включение?

3. Почему число $\delta>0$, найденное при доказательстве непрерывности функции $f: X \to Y$ в точке x для числа $\varepsilon=1/2$, годится и для всех $\varepsilon \geqslant 1/2$?
4. Пусть, как в упражнении 3, $\delta>0$ — число, найденное для числа $\varepsilon=1/2$. Почему тогда для $\varepsilon=1/2$ годится и любое меньшее значение δ?
5. Разобьем плоскость R^2 на две части A и B, где A состоит из всех точек, лежащих внутри окружности C радиуса 1 с центром z, а B — дополнение множества A в R^2. Определим функцию $f: R^2 \to R^2$ следующими условиями: сужение $f|A$ поворачивает множество A вокруг точки z на угол $90°$, а каждую точку множества B функция f оставляет неподвижной. Где функция f непрерывна и где разрывна? Для каких значений ε у произвольной точки разрыва нет соответствующих значений δ?
6. Доказать, что ортогональная проекция $f: R^3 \to L$, где L — некоторая прямая или плоскость в R^3, непрерывна.
7. Пусть S — сфера радиуса 1 с центром в начале координат в пространстве R^3. Пусть $p=(0, 0, 1)$ — северный полюс сферы S и $f:(S-p) \to R^2$ — стереографическая проекция из полюса p множества $S-p$ на экваториальную плоскость. Нарисуйте чертеж, показывающий, что функция f непрерывна. На какой части множества $S-p$ функция f уменьшает расстояния? Показать, что функция f взаимно однозначна и что обратная функция $f^{-1}: R^2 \to S-p$ также непрерывна. Каков образ при f проколотой окрестности $N(p, r, S)-p$ для значений r, меньших единицы? Почему нельзя так определить значение fp, чтобы продолженная функция осталась непрерывной?
8. Показать, что если f и g — непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, принимающие значения в R, то сумма $f+g$ и разность $f-g$ также непрерывны. *Указание*: доказать непрерывность функций $hx=fx+gx$ и $kx=fx-gx$ в точке x, оценив для всех $x, x' \in [a, b]$ абсолютную величину $|hx-hx'|$ и $|kx-kx'|$ с помощью неравенства треугольника

$$|(fx \pm gx)-(fx' \pm gx')| \leqslant |fx-fx'|+|gx-gx'|.$$

9. Пусть $f: R^3-z \to S$ — радиальная проекция на сферу из ее центра z (рис. 3.4). Пусть радиус сферы S равен 1. Показать, что δ на этом чертеже определяется как функция от ε формулой

$$\delta=d\varepsilon\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}},$$

где d — расстояние от x до z. *Указание*: опустить перпендикуляр из точки z на хорду, соединяющую fx и t, обозначить через θ половину угла с вершиной z, определяемого точками fx и t, и воспользоваться тождеством $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

§ 4. Открытые и замкнутые множества

Теперь мы хотим определить и изучить один специальный класс подмножеств $X \subset R^n$, называемых *открытыми* множествами в X. Они будут играть в нашей дальнейшей работе основную роль, потому что различные топологические свойства множества X, которые мы будем обсуждать, легко выражаются на языке открытых множеств. Кроме того, если пользоваться открытыми множествами, очень простую форму приобретает условие непрерывности функции.

Вовсе не легко заранее понять, почему понятие открытого множества должно быть столь уж важным. Историческим фактом является то, что признание оно получило не сразу. В ранний период развития топологии (1900—1930 г.) были придуманы и разработаны различные подходы к рассматриваемому вопросу. Им соответствовали понятия с такими названиями: окрестностные пространства, метрические пространства, предельные точки, пределы последовательностей и замыкания. В то время было не ясно, что эти подходы эквивалентны, никто не мог предсказать направление развития и окончательную форму топологии. Только к концу этого периода постепенно стало ясно, что понятие открытого множества является простым и гибким инструментом для исследования всех топологических свойств. С тех пор стали предпочитать подход, связанный с этим понятием.

Определение. Пусть X — множество в R^n. Подмножество $U \subset X$ называется *открытым* множеством в X, если у каждой точки $x \in U$ существует такая ее окрестность в X, которая лежит в U. Это условие иначе можно сформулировать так: для каждой точки $x \in U$ существует такое число $r > 0$, что $N(x, r, X) \subset U$.

Как мы вскоре увидим, открытые множества легко распознавать, и они очень разнообразны. Первый наш класс примеров состоит из окрестностей.

Все окрестности являются открытыми множествами.

Пусть заданы $x_0 \in X$ и $r_0 > 0$. Чтобы доказать наше утверждение, нужно показать, что $N(x_0, r_0, X)$ есть открытое множество в X (рис. 4.1). Мы это установим, убедившись, что для каждой точки $x \in N(x_0, r_0, X)$ существует такое положительное число r, что окрестность $N(x, r, X)$ содержится в $N(x_0, r_0, X)$. Положим $r = r_0 - d(x, x_0)$. Условие $x \in N(x_0, r_0, X)$ означает, что $d(x, x_0) < r_0$, поэтому r должно быть положительным. Пусть $y \in N(x, r, X)$. Тогда $d(x, y) < r$. Неравенство треугольника дает

$$d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y),$$

и, так как $d(x, y) < r$, имеем

$$d(x_0, y) < d(x_0, x) + r.$$

Но по определению числа r $d(x_0, x) + r = r_0$, так что

$$d(x_0, y) < r_0.$$

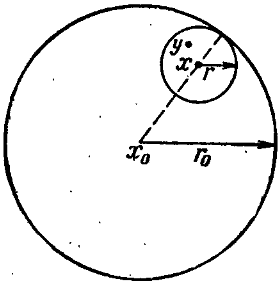


Рис. 4.1.

Это показывает, что любая точка окрестности $N(x, r, X)$ принадлежит окрестности $N(x_0, r_0, X)$ и, значит, окрестность $N(x_0, r_0, X)$ открыта в X.

Следующие теоремы показывают, как из данных открытых множеств можно строить другие примеры открытых множеств.

Теорема 4.1. *Если U и V — открытые множества в X, то их пересечение $U \cap V$ есть открытое множество в X. Пересечение любого конечного числа открытых множеств в X является открытым множеством в X.*

Докажем первое утверждение. Пусть $x \in U \cap V$. Так как точка $x \in U$ и U открыто, найдется такое $r > 0$, что $N(x, r, X) \subset U$. Так как точка $x \in V$ и V открыто, найдется и такое $s > 0$, что $N(x, s, X) \subset V$. Пусть t — меньшее из чисел r и s. Тогда ясно, что окрестность $N(x, t, X)$ лежит и в U, и в V, и, следовательно, в $U \cap V$. Тем самым доказано, что пересечение $U \cap V$ открыто. Чтобы доказать второе утверждение, предположим, что точка x принадлежит каждому из открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Тогда существуют такие числа $r_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, что $N(x, r_i, X) \subset U_i$. Пусть t — наименьшее из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Очевидно, окрестность $N(x, t, X)$ содержится в пересечении, и это завершает доказательство.

В проведенном выше рассуждении мы предполагали, что пересечение $U \cap V$ содержит хотя бы одну точку. Если U и V не имеют общих точек, т. е. если

$$U \cap V = \varnothing = \text{пустому множеству},$$

то нам нужно проверить, что пустое множество удовлетворяет определению открытого множества. На первый взгляд может показаться, что заниматься такой проверкой довольно глупо, однако это не так. Так как множество $\varnothing$ не имеет точек, то законно считать, что каждая его точка имеет окрестность, содержащуюся в $\varnothing$. Таким образом, $\varnothing$ открыто. Посмотрим на это с другой стороны. Если множество A не открыто в X, то оно содержит некоторую точку, у которой нет окрестности, содержащейся в A; значит, неоткрытое множество не может быть пустым. Этот факт достаточно важен для того, чтобы вместе с другим важным фактом, а именно что всякое множество является открытым множеством в себе самом, сформулировать его в виде отдельной теоремы.

Теорема 4.2. *Пустое множество $\varnothing$ и само X являются открытыми в X.*

Второе утверждение очевидно, так как для каждой точки $x \in X$ по определению окрестности при любом $r > 0$

$$N(x, r, X) \subset X.$$

Следующая теорема дает еще один метод построения новых открытых множеств из старых.

Теорема 4.3. *Объединение любой совокупности (конечной или бесконечной) открытых множеств в X есть открытое множество в X.*

Чтобы это доказать, обозначим буквой C совокупность открытых множеств, и пусть A — их объединение. Если $x \in A$, то для некоторого открытого множества $U \in C$ мы должны иметь $x \in U$. Так как U открыто, найдется такое $r>0$, что $N(x, r, X) \subset U$. По определению объединения $U \subset A$. Отсюда следует, что $N(x, r, X) \subset A$, и это показывает, что A открыто.

Из этих результатов видно, что для большинства множеств X семейство открытых множеств в X очень велико. Образуя объединения окрестностей, мы можем построить бесконечно много открытых множеств. Покажем теперь, что многие из известных нам множеств являются открытыми.

Если $X=R$, то каждая окрестность есть открытый промежуток

$$N(x, r)=(x-r, x+r).$$

Каждый открытый промежуток является окрестностью своего центра и, значит, открытым множеством в R. Объединение двух или более открытых промежутков также есть множество, открытое в R. Например, объединение последовательности неперекрывающихся открытых промежутков $(1/(n+1), 1/n)$, где $n=1, 2, 3, \ldots$, открыто.

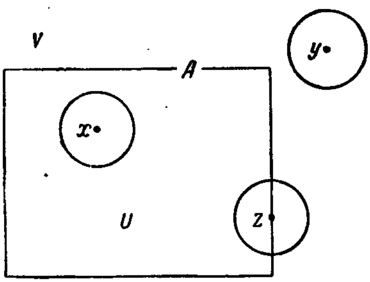


Рис. 4.2.

Пусть $X=R^2$. В этом случае окрестностями служат внутренности кругов, так что каждое такое множество открыто в R^2. Пусть A — множество всех точек, лежащих на четырех сторонах прямоугольника в R^2. Тогда его дополнение R^2-A состоит из двух частей: множества U точек, лежащих внутри A, и множества V точек, лежащих вне A (рис. 4.2). Если x — точка множества U и мы выберем положительное число r, меньшее, чем кратчайшее расстояние от x до сторон A, то вся окрестность $N(x, r)$ будет лежать в U. Поэтому U открыто в R^2. Точно так же и множество V открыто в R^2. Но множество A не открыто в R^2, потому что оно имеет точку z, ни одна окрестность $N(z, r, R^2)$ которой не содержится в A. В действительности каждая точка множества A обладает этим свойством. Эти заключения останутся справедливыми, если мы заменим прямоугольник A любым простым замкнутым многоугольником вроде треугольника или шестиугольника.

Стонт заметить, что свойство множества быть открытым является довольно деликатным — оно может утратиться, если к множеству добавить одну единственную точку. Если в рассмотренном нами примере мы присоединим к U одну лишь точку, принадлежащую A или находящуюся вне A, то такое расширенное множество уже не будет открытым в R^2.

Если $X=R^3$, то окрестностями служат внутренности шаров и каждое такое множество открыто в R^3. Подобным же образом открыто в R^3 и множество точек, лежащих вне произвольного шара, но никакая сфера в R^3 не открыта. Пусть A — множество точек, принадлежащих граням, ребрам или являющихся вершинами некоторого прямоугольного параллелепипеда в R^3; тогда дополнение $R^3 - A$ разбивается на два открытых множества точек, лежащих внутри и вне параллелепипеда. Пусть T — множество точек поверхности тора (бублика) в R^3; тогда $R^3 - T$ также разбивается на два открытых множества: множество точек, лежащих внутри T, и множество внешних точек.

В приведенных выше примерах в качестве X мы брали все пространство R^n. Следующая теорема говорит, как «узнать» открытые множества в подмножестве X, если нам известны открытые множества в R^n.

Теорема 4.4. *Если $X \subset R^n$, то совокупность открытых множеств в X совпадает с совокупностью пересечений X с всевозможными открытыми множествами в R^n.*

В первой части доказательства покажем, что если U — открытое множество в R^n, то $X \cap U$ — открытое множество в X. Пусть $x \in X \cap U$. Так как $x \in U$ и U открыто, найдется такое $r>0$, что $N(x, r) \subset U$. Поэтому

$$X \cap N(x, r) \subset X \cap U.$$

Но $N(x, r, X) = X \cap N(x, r)$, так что

$$N(x, r, X) \subset X \cap U.$$

Таким образом, у каждой точки $x \in X \cap U$ существует окрестность в X, содержащаяся в $X \cap U$; следовательно, пересечение $X \cap U$ является открытым множеством в X. Первая часть теоремы доказана.

Затем мы должны доказать, что любое открытое в X множество V можио расширить до некоторого множества U, открытого в R^n и такого, что $V = X \cap U$. Если V — окрестность $N(x, r, X)$, то ясно, что искомым расширением будет окрестность $N(x, r, R^n)$. Легко проверить, что любое множество V, открытое в X, является объединением всех окрестностей, содержащихся в V, и потому искомое расширение мы можем построить, расширяя каждую окрестность, содержащуюся в V. Обозначим через U объединение окрестностей $N(x, r, R^n)$ для всех $x \in V$ и $r > 0$, таких, что $N(x, r, X) \subset V$. Покажем, что тогда множество U удовлетворяет нашим требованиям, т. е. оно открыто в R^n и $X \cap U = V$. Так как в R^n открыта каждая окрестность $N(x, r, R^n)$, из теоремы 4.3 следует, что в R^n открыто и U. Доказательство того, что $X \cap U = V$, будет проведено в два этапа: сначала мы покажем, что каждый элемент множества V принадлежит $X \cap U$, а затем, что каждый элемент множества $X \cap U$ принадлежит V.

Так как множество V открыто в X, у каждой точки $x \in V$ есть окрестность $N(x, r, X) \subset V$, и потому $x \in U$. Это показывает, что $V \subset U$. Но V является также подмножеством X, так что $V \subset X \cap U$. Наконец, чтобы доказать включение $X \cap U \subset V$, заметим, что любая точка $y \in X \cap U$ одновременно принадлежит и X, и U. Как точка множества U, она лежит в некоторой окрестности $N(x, r, R^n)$, такой, что $N(x, r, X) \subset V$. Поскольку она принадлежит и X, она содержится в пересечении $X \cap N(x, r, R^n) = N(x, r, X)$, и так как $N(x, r, X) \subset V$, отсюда следует, что $y \in V$. Это завершает доказательство равенства $X \cap U = V$ и всей теоремы.

Подведем итоги тому, что мы до сих пор сделали в § 4. Основным свойством окрытого множества U в X является его определяющее свойство: у каждой точки $x \in U$ существует окрестиость $N(x, r, X) \subset U$. Мало что можно еще сказать об отдельном открытом множестве. Доказанные выше теоремы устанавливают свойства семейства всех открытых в X множеств. Именно, это семейство в качестве своих элементов содержит пустое множество, само X и каждую окрестность $N(x, r, X)$; кроме того, оно содержит пересечение любого конечного числа своих элементов и объединение любой совокупности своих элементов, конечной или бесконечной.

Перейдем теперь к понятию замкнутого множества.

Определение. Пусть X — множество в R^n. Подмножество $A \subset X$ называется *замкнутым* в X, если его дополнение в X является открытым множеством в X. Короче, A замкнуто в X, если $X - A$ открыто в X.

Если воспользоваться определением открытого множества, то мы получим следующий критерий замкнутости множества A в X: каждая точка дополнения $X - A$ должна иметь окрестность, не пересекающуюся с A. Например, множество, состоящее из одной точки, всегда замкнуто в любом содержащем его множестве X. В самом деле, если x — данная, а y — любая другая точка, то, когда r не превосходит расстояния между x и y, окрестность $N(y, r)$ ие содержнт x. Точно так же прямая L в плоскости или пространстве является замкнутым множеством; действительно, если y не принадлежит L и r — расстояние от y до ближайшей точки L, то окрестность $N(y, r)$ не пересекается с L.

Каждый приведенный выше пример открытого множества дает, если перейти к дополнению, пример некоторого замкнутого множества. В случае прямоугольника A на рис. 4.2 дополнение множества V внешних точек есть объединение A с множеством U внутренних точек. Так как V открыто, то $A \cup U$ замкнуто в R^2. Аналогично и $A \cup V$ замкнуто в R^2.

Поскольку объединение $U \cup V$ открыто и A — его дополнение, то A замкнуто в R^2.

Отношение между множеством A в X и его дополиением $X - A$ взаимно: дополнением $X - A$ является A. Это соответствие между подмножествами множества X называется *двойственностью* в X. Открытые множества и замкнутые множества — двойственные понятия, потому что замкнутое множество двойственно открытому и наоборот.

Эта двойственность между открытыми и замкнутыми множествами позволяет из каждой теоремы, доказанной нами для открытых множеств, вывести «двойствеиную» теорему для замкнутых множеств. Формулируя эти двойственные предложения, мы воспользуемся тем фактом, что объединение и пересечение являются «двойственными» операциями в следующем смысле: *дополнение объединения двух множеств есть пересечение их дополнений*:

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B).$$

Точно так же *дополнение пересечения двух множеств есть объединение их дополнений:*

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B).$$

Итак, следующие четыре теоремы для замкнутых множеств соответствуют доказанным выше теоремам для открытых множеств. Теорема о пересечении двух открытых множеств дает двойственную теорему:

Теорема 4.1′. *Если A и B — замкнутые множества в X, то их объединение $A \cup B$ есть замкнутое множество в X. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств в X является замкнутым множеством в X.*

Чтобы получить предложение, двойственное теореме о том, что $\varnothing$ и X открыты, нужно только заметить, что $\varnothing$ и X являются дополнительными множествами в X, т. е. $X - \varnothing = X$ и $X - X = \varnothing$.

Теорема 4.2′. *Пустое множество $\varnothing$ и само X являются одновременно открытыми и замкнутыми в X.*

Обычно множество, открытое в X, не замкнуто в X и наоборот. В § 7 мы подробно изучим множества, одновременно открытые и замкнутые в X.

Теорема об объединении любой совокупности открытых множеств дает такую двойственную теорему:

Теорема 4.3′. *Пересечение любой совокупности (конечной или бесконечной) замкнутых множеств в X есть замкнутое множество в X.*

Предложением, двойственным к теореме о том, что множества, открытые в X, являются пересечениями X с множествами, открытыми в R^n, служит

Теорема 4.4′. *Если $X \subset R^n$, то совокупность замкнутых множеств в X совпадает с совокупностью пересечений X с всевозможными замкнутыми множествами в R^n.*

Допустим, что $A \subset X \subset R^n$ и A замкнуто в R^n. Тогда теорема утверждает, что пересечение $A \cap X$ замкнуто в X. Так как $A \cap X = A$, получаем

Следствие. *Если A замкнуто в R^n, то A замкнуто и во всяком множестве X, содержащем A.*

Не нужно думать, что каждое множество в R^n открыто или замкнуто в нем; многие множества ни открыты, ни замкнуты. Полуоткрытый промежуток $(a, b]$ в R ни открыт, ни замкнут. У любой точки $x \in (a, b]$, отличной от b, существует некоторая окрестность, лежащая в этом промежутке. С другой стороны, каждая окрестность точки b содержит точки, не принадлежащие $(a, b]$. На рис. 4.2 объединение множества U и какой-либо одной точки прямоугольника A ни открыто, ни замкнуто в R^2. Раньше мы видели, что оно не открыто. Оно и не замкнуто, так как любая окрестность $N(x, r)$ каждой точки $x \in A$ содержит точки множества U. Но по нашему критерию замкнутости множества всякая точка его дополнения должна иметь окрестность, не пересекающуюся с данным множеством.

Сформулируем теперь условие непрерывности функции с помощью открытых множеств. Простота этого условия показывает, насколько удобны открытые множества при изучении непрерывных функций.

Теорема 4.5. *Функция f: $X \to Y$ непрерывна в том и только в том случае, если прообраз каждого множества, открытого в Y, есть множество, открытое в X. Эквивалентно функция f непрерывна в том и только в том случае, если прообраз каждого множества, замкнутого в Y, есть множество, замкнутое в X.*

Напомним, что функция f непрерывна, если для каждой точки $x \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что функция f отображает δ-окрестность точки x в ε-окрестность точки fx. Требование, чтобы прообраз $f^{-1}V$ каждого множества V, открытого в Y, был открыт в X, конечно, звучит значительно проще.

Для доказательства теоремы сначала предположим, что функция f непрерывна и что V — произвольное открытое множество в Y. Нам нужно показать, что у каждой точки $x \in f^{-1}V$ существует окрестность, содержащаяся в $f^{-1}V$. По предположению $fx \in V$ и V открыто в Y. Поэтому существует такое число $\varepsilon > 0$, что $N(fx, \varepsilon, Y) \subset V$. Так как функция f непрерывна, найдется такое $\delta > 0$, что образ при f окрестности $N(x, \delta, X)$ будет содержаться в $N(fx, \varepsilon, Y)$, а значит и в V. Следовательно, $N(x, \delta, X) \subset f^{-1}V$, и мы доказали, что прообраз $f^{-1}V$ каждого открытого в Y множества V открыт в X.

Докажем обратное утверждеиие. Пусть функция f обладает тем свойством, что прообраз $f^{-1}V$ каждого множества V, открытого в Y, открыт в X. Покажем, что она непрерывна. Пусть $x \in X$ и задано $\varepsilon > 0$. Окрестность $N(fx, \varepsilon, Y)$ является открытым множеством в Y, так что ее прообраз открыт в X; обозначим его буквой U. Так как точка x принадлежит U и U открыто, найдется окрестность $N(x, \delta, X)$, содержащаяся в U. Отсюда следует, что $fN(x, \delta, X) \subset N(fx, \varepsilon, Y)$, и это показывает, что функция f непрерывна.

Мы доказали ту часть теоремы, которая относится к открытым множествам. Двойственное утверждение для замкнутых множеств является следствием того факта, что для любой функции $f\colon X \to Y$ дополнение в X прообраза множества $A \subset Y$ совпадает с прообразом дополнения множества A в Y. Иначе говоря, для каждого множества $A \subset Y$ имеет место равенство

$$X - f^{-1}A = f^{-1}(Y - A).$$

Доказательство этой формулы послужит небольшим упражнением для читателя. Примем его на веру и предположим, что функция f непрерывна и множество A замкнуто в Y. Тогда дополнение $Y - A$ открыто в Y. По первой части теоремы прообраз $f^{-1}(Y - A)$ открыт в X. Поэтому его дополнение замкнуто в X. Но по выписанной выше формуле это дополнение есть $f^{-1}A$; следовательно, $f^{-1}A$ замкнуто в X.

Допустим теперь, наоборот, что прообраз каждого замкнутого множества замкнут. Если A открыто в Y, то $Y - A$ замкнуто в Y; поэтому $f^{-1}(Y - A)$ замкнуто в X. Значит, его дополнение открыто в X. Но по нашей формуле это дополнение есть $f^{-1}A$. Таким образом, для каждого открытого множества $A \subset Y$ прообраз $f^{-1}A$ открыт в X. Следовательно, функция f непрерывна. Это завершает доказательство.

Теорема 4.6. *Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — непрерывные функции, то их композиция $gf\colon X \to Z$ непрерывна.*

Пусть W — открытое множество в Z. Так как функция g непрерывна, то по предыдущей теореме прообраз $g^{-1}W$ является открытым множеством в Y, а так как непрерывна и функция f, то в силу той же теоремы $f^{-1}(g^{-1}W)$ — открытое множество в X. Читатель легко проверит, что

$$(gf)^{-1}W = f^{-1}(g^{-1}W)$$

(см. ответ к упражнению 2.8). Таким образом, мы показали, что прообраз $(gf)^{-1}W$ каждого открытого в Z множества W открыт. В силу теоремы 4.5 это означает, что функция gf непрерывна.

В последующих параграфах мы будем часто пользоваться выражением «пространство X». В каждом из этих случаев X будет подмножеством некоторого пространства R^n. Однако мы хотим ограничиться рассмотрением точек множества X и открытых множеств в X и не обращать внимания на объемлющее пространство. Такая точка зрения называется *внутренней.* Мы советуем читателю просмотреть определения и теоремы, изложенные в этом параграфе, и заметить, что все они, кроме теорем 4.4 и 4.4′, сформулированы внутренним образом. Важность этой точки зрения мы обсудим в § 8.

Упражнения

1. Показать, что если X состоит из конечного числа точек, то каждое подмножество X одновременно и открыто, и замкнуто в X.
2. Пусть L — прямая в R^2 и U — некоторый открытый промежуток в L; найти такое открытое в R^2 множество V, что $V \cap L = U$.
3. Пусть D — круг в R^2, состоящий из точек (x, y), для которых $x^2+y^2 \leqslant 1$; найти наибольшее подмножество D, открытое в R^2.
4. Привести пример замкнутого в R^2 множества, превращающегося в открытое при удалении одной из его точек.
5. Привести пример, показывающий, что дополнение объединения двух множеств не является объединением их дополнений.
6. Привести пример, показывающий, что объединение двух неоткрытых множеств может оказаться открытым. (*Указание*: рассмотреть полуоткрытые промежутки.)
7. Показать, что если $X \subset Y \subset R^n$, то каждое множество, открытое в X, является пересечением $X \cap V$, где V — некоторое множество, открытое в Y.
8. Пусть C — семейство открытых промежутков в R:

$$I_1 = (-1,\ 1),\ I_2 = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \ldots,$$

и

$$I_a = \left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\right) \text{ при } a = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Показать, что пересечение всех этих открытых множеств не открыто в R.
9. Привести пример отображения $f\colon X \to Y$ и множества $A \subset X$, для которых $Y - fA$ отлично от $f(X - A)$.

10. Доказать, что для любой функции $f: X \to Y$ дополнение в X прообраза произвольного множества в Y совпадает с прообразом дополнения этого множества в Y, т. е. $X - f^{-1}A = f^{-1}(Y - A)$.
11. Показать, что каждое открытое в X множество является объединением некоторой совокупности окрестностей в X.

§ 5. Полнота системы действительных чисел

Центральным пунктом этого параграфа является доказательство того, что действительных чисел достаточно много. Точнее говоря, если под действительным числом понимать нечто, представимое десятичной дробью (конечной или бесконечной), то имеется достаточно действительных чисел для того, чтобы целиком заполнить действительную прямую.

В процессе развития математики система чисел расширялась не один раз. Сначала был доисторический человек с его счетом: один, два, три, много. Затем появилось понятие бесконечной последовательности целых положительных чисел вместе с соответствующей терминологией и сокращенными обозначениями. Потом возникли дроби или рациональные числа, затем нуль и отрицательные числа, позже — «корни» алгебраических уравнений, или алгебраические числа, и, наконец, трансцендентные числа [1]).

На каждом из этих этапов некоторые математики постепенно осознавали, что понятие числа, как они его тогда представляли, является недостаточно широким. После нескольких попыток им в конце концов удавалось построить новые числа, которые, если их добавить к старым, этот пробел устраняли. Большинство из нас полностью понимает необходимость целых и рациональных чисел, включая отрицательные числа и нуль. Но далеко не все хорошо сознают, почему их не хватает.

Еще пифагорейцы открыли, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом; точнее, не существует дроби,

---

[1]) Подробное изложение вопроса о развитии понятия числа см. в выпуске популярной серии «Современная математика»: Нивен А., Числа рациональные и иррациональные, изд-во «Мир», М., 1966.

квадрат которой равен двум. Приведем доказательство, принадлежащее Евклиду. Допустим, что напротив m/n есть дробь, квадрат которой равен 2. Мы можем считать дробь m/n несократимой, т. е. что m и n не имеют общего целочисленного делителя, отличного от 1. В частности, m и n тогда не могут быть одновременно четными числами (все общие двойки уже «сокращены»). Равенство $(m/n)^2=2$ перепишем в виде $m^2=2n^2$, откуда видно, что m^2 есть четиое число. Но квадрат нечетного числа и сам нечетен:

$$(2r+1)^2=4r^2+4r+1=2(2r^2+2r)+1.$$

Так как m^2 четно, отсюда следует, что и m четно, так что $m=2k$ для иекоторого целого числа k. Если мы подставим вместо m это значение в наше равенство, то оно примет вид $4k^2=2n^2$, откуда $n^2=2k^2$. Это значит, что n^2 четно и, следовательио, n четно. Таким образом, и m и n — четные числа в противоречии с тем фактом, что дробь m/n несократима. Это противоречие показывает, что нет дроби, квадрат которой равен 2.

Число $\sqrt{2}$ нужно было пифагорейцам потому, что они были геометрами. Отправляясь от прямолинейного отрезка длины d, они могли с помощью циркуля и линейки построить квадрат со стороной d. По теореме Пифагора длина его диагонали равиа $\sqrt{2}\,d$.

Посмотрим на последовательные расширения системы чисел с этой точки зрения. Если дана прямая L и две точки на L, называемые 0 и 1, то с помощью циркуля можно одну за другой нанести остальные целочисленные точки 2, 3, ... и —1, —2, ... С помощью другого построения, проведя вспомогательную прямую, каждый промежуток $[n, n+1]$ можно разбить на сколько угодно равных частей. Таким образом, на прямой L, исходя из двух точек 0 и 1, можно построить все точки с рациональными координатами.

Рациональные точки теперь плотио распределены по прямой L (между любыми двумя такими точками иаходится бесконечно много других). Легко понять, что после того, как были введены рациональные числа, можно было подумать, что они заполняют *всю* прямую L. Однако пифагорейцы открыли, что диагональ квадрата со стороной 1, если ее нанести на L (см. рис. 5.1), даст точку $\sqrt{2}$, не совпадающую ни с одной из рациональных точек. Как это должно было поразить тех, кто сделал это открытие! Оно побудило их ввести новые числа, соответствующие новым точкам прямой L, возникающим при таких геометрических построениях.

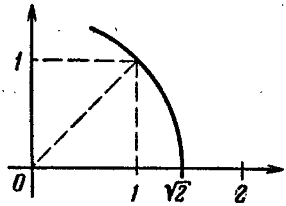


Рис. 5.1.

К сожалению, и после введения квадратных корней чисел оказывается все еще слишком мало. Трисекция угла и удвоение куба требуют взятия кубичных корней из рациональных чисел, а последние обычно не являются квадратными корнями из рациональных чисел. Так математики были вынуждены ввести корни n-й степени из рациональных чисел и даже еще большее множество всех алгебраических чисел. Эти числа являются нулями многочленов с целочисленными коэффициентами.

Примерно сто лет тому назад было установлено, что и алгебраических чисел недостаточно, т. е. что на числовой прямой существуют точки, которые не соответствуют никаким алгебраическим числам. В частности, было доказано, что число π (отношение длины окружности к диаметру этой окружности) не является алгебраическим числом. Возникает вопрос: когда же этот процесс закончится, если это вообще случится?

Широкое применение десятичной системы и разложений чисел в десятичные дроби привело к новой точке зрения на эти вопросы. Все до сих пор введенные числа могут быть представлены своими десятичными разложениями. Следует подчеркнуть, что большинство рациональных и все остальные числа представляются бесконечными десятичными дробями. И теперь естественно подойти к определению системы чисел с другой стороны и сказать, что любая десятичная дробь и есть некоторое действительное число, т. е. сказать, что мы можем определить множество R

действительных чисел как множество всех десятичных дробей (с обычным условием, что дробь, оканчивающаяся девятками, представляет то же число, что и некоторая другая дробь, оканчивающаяся нулями, например, 3,26999...=3,27000...). Именно так мы фактически и поступим. Чтобы оправдать эту процедуру, нам нужно показать, что тем самым будет положен конец созданию новых чисел: числа из множества R целиком заполняют прямую.

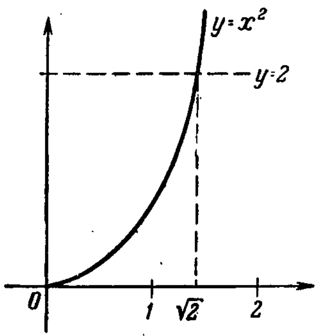


Рис. 5.2.

Мы должны объяснить, что означают слова «заполняют прямую». Вспомним стандартный метод извлечения квадратного корня, например $\sqrt{2}$. Рассмотрим график функции $y=x^2$ и попытаемся определить координату x точки, в которой горизонтальная прямая $y=2$ пересекает этот график (см. рис. 5.2). Сначала испытаем квадраты нескольких первых целых чисел и найдем, что $1^2=1$ — слишком мало, а $2^2=4$ — слишком велико. Теперь, если x возрастает от одного положительного значения до другого, то и его квадрат возрастает. Этот факт говорит нам о том, что $\sqrt{2}$ лежит где-то в промежутке $I_0=[1, 2]$ и целая часть его десятичного разложения равна 1. Разделим затем промежуток I_0 на десять равных частей и возведем в квадрат каждое из чисел 1,0; 1,1; 1,2; ... ; 1,9; 2,0. Мы найдем, что $(1,4)^2$ меньше, чем 2, а $(1,5)^2$ больше. Таким образом, $\sqrt{2}$ лежит в промежутке $I_1=[1,4; 1,5]$, и его десятичное разложение начинается с 1,4. Затем разделим на десять равных частей промежуток I_1 и испытаем квадраты точек деления; мы найдем, что $\sqrt{2}$ лежит в промежутке $I_2=[1,41; 1,42]$. Продолжая этот процесс, мы определим бесконечную последовательность промежутков $I_0\supset I_1\supset I_2\supset \ldots \supset I_k\supset \ldots$, стягивающуюся к $\sqrt{2}$ (символ $\supset$ является перевернутым символом $\subset$, а отношение «$A \supset B$» означает, что A содержит B). Каждый из этих промежутков является десятой частью предыдущего, а десятичное разложение $\sqrt{2}$ можно вычитать из десятичных разложений их левых концов, которые равны 1, затем 1,4, затем 1,41 и т. д.

Рассмотрим теперь аналогичную, но более общую задачу. Вместо уравнения $y=x^2$ возьмем уравнение $y=fx$, где f — произвольная непрерывная функция, возрастающая вместе с x, а вместо того, чтобы отыскивать число x, для которого $x^2=2$, будем решать уравнение $fx=b$, где b — некоторое данное число. Если мы сумеем найти начальный промежуток $I_0=[n, n+1]$, такой, что $fn<b$ и $f(n+1)>b$, то мы снова сможем провести процесс повторного деления промежутков на десять равных частей. Это даст нам бесконечную последовательность промежутков $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$. Соединяя десятичные разложения левых концов этих промежутков точно так, как и в случае $\sqrt{2}$, мы сможем построить десятичное разложение числа a, которое лежит в каждом из этих промежутков и потому должно служить решением нашей задачи: $fa=b$. Это прямо подводит нас к заключению, что если мы согласимся, чтобы каждая десятичная дробь определяла некоторое действительное число, то в нашем распоряжении окажется достаточно действительных чисел для решения любой задачи рассмотренного выше типа.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству теоремы, которая переведет на точный язык некоторые из предыдущих идей.

Определение. Бесконечная последовательность замкнутых промежутков действительных чисел I_0, I_1, I_2, I_3, $\ldots$, I_n, $\ldots$ называется *стягивающейся*, если каждый промежуток содержит следующий, а значит и все промежутки с бо́льшими номерами:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

Стягивающаяся последовательность называется *регулярно* стягивающейся последовательностью, если

$I_0=[m, m+1]$ есть промежуток между некоторым целым числом m и следующим целым числом $m+1$ и I_n для каждого $n\geqslant 1$ является одним из промежутков, получаемых при разбиении I_{n-1} на десять равных частей. Таким образом, I_1 составляет десятую часть I_0, I_2 — десятую часть I_1 и т. д. Длина промежутка I_n равна 10^{-n}.

Теорема о полноте. *Каждая стягивающаяся последовательность замкнутых промежутков имеет общую точку, т. е. пересечение всех промежутков этой последовательности не пусто.*

Рассмотрим сначала случай регулярно стягивающейся последовательности. Пусть a_n для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ обозначает левый конец промежутка I_n; тогда $a_0=m$ есть целое число. Так как I_n имеет длину 10^{-n}, то $I_n=[a_n, a_n+10^{-n}]$. Точками, делящими I_{n-1} на десять равных частей, будут

$$a_{n-1},\ a_{n-1}+\frac{1}{10^n},\ a_{n-1}+\frac{2}{10^n},\ \ldots,\ a_{n-1}+\frac{9}{10^n},\ a_{n-1}+\frac{10}{10^n}.$$

Так как I_n — один из этих десяти промежутков, то его левый конец должен иметь вид

$$a_n=a_{n-1}+\frac{k_n}{10^n},$$

где k_n — одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, 9$. Таким образом, данная последовательность промежутков определяет целое число m и бесконечную последовательность однозначных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Пусть c — действительное число

$$c=m+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ldots+\frac{k_n}{10^n}+\ldots$$

(т. е. десятичное разложение числа c имеет вид $m,k_1k_2k_3\ldots$). Так как

$$a_n=m+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ldots+\frac{k_n}{10^n},$$

ясно, что $a_n \leqslant c$. Далее, десятичные разложения числа $a_n + 1/10^n$ и числа c совпадают вплоть до $(n-1)$-го знака, но на n-м месте после запятой у c стоит k_n, а у $a_n + 1/10^n$ стоит $k_n + 1$[1]. Отсюда следует, что

$$a_n \leqslant c \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Эти неравенства говорят, что $c \in I_n$, и так как это имеет место для каждого n, отсюда следует, что c принадлежит каждому промежутку рассматриваемой последовательности, а потому и их пересечению. Тем самым теорема в случае регулярно стягивающейся последовательности доказана.

Пусть теперь I_0, I_1, ... — произвольная стягивающаяся последовательность; пусть $I_0 = [a_0, b_0]$, $I_1 = [a_1, b_1]$, ... и вообще $I_n = [a_n, b_n]$. Тогда имеют место неравенства

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0.$$

Выберем целое $r \leqslant a_0$ и целое $s \geqslant b_0$, получив таким образом промежуток $I' = [r, s]$, содержащий I_0 и все остальные промежутки. Промежуток I' разбивается целыми числами, находящимися между r и s, на равные частичные промежутки длины единица. Пусть $I'_0 = [m, m+1]$ — тот из них, для которого лишь конечное число концов a лежит левее m и все a лежат левее $m+1$. Иными словами, I'_0 — самый правый из тех частичных промежутков, которые содержат левые концы a данной последовательности. Теперь разделим I'_0 на десять равных частей, и пусть $I'_1 = [c_1, d_1]$ тот из получившихся при этом частичных промежутков, для которого левее c_1 лежит лишь конечное число a, а левее d_1 — все a. Затем разделим на десять равных частей промежуток I'_1, и пусть $I'_2 = [c_2, d_2]$ — та из этих частей, для которой лишь конечное число a лежит левее c_2 и все a лежат левее d_2. Точно таким же

---

[1]) Если $k_n = 9$, то число $a_n + 1/10^n$ на n-м месте после запятой имеет 0, но зато на $(n-1)$-м месте у него стоит $k_{n-1}+1$ (если и $k_{n-1} = 9$, то это относится к предыдущему знаку и т. д.). Очевидно, что и в этом случае $c \leqslant a + 1/10^n$. — *Прим. перев.*

образом продолжим этот процесс, так что при каждом n промежуток $I'_n=[c_n, d_n]$ будет десятой частью промежутка I'_{n-1}, только конечное число a будет лежать левее c_n и все они будут лежать левее d_n. Так как последовательность $I'_0, I'_1, \ldots$ стягивается регулярно, существует точка c, принадлежащая всем промежуткам этой последовательности. Таким образом, $c_n \leqslant c \leqslant d_n$ при всех n. Поскольку I'_n имеет длину 10^{-n}, имеет место неравенство $c_n \leqslant c \leqslant c_n+10^{-n}=d_n$, так что

$$d_n \leqslant c+10^{-n} \text{ и } c-10^{-n} \leqslant c_n.$$

Мы хотим доказать, что $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ при каждом n. Допустим, что, напротив, существует такое N, что $c<a_N$. Так как степени числа 10 неограниченно возрастают, найдутся такие целые n, что

$$10^n > \frac{1}{a_N-c}.$$

Выберем из них число n, большее, чем N. Для такого n одновременно

$$a_n \geqslant a_N \text{ и } 10^n > \frac{1}{a_N-c}.$$

Второе неравенство можно переписать в виде $a_N-c> >10^{-n}$ или $a_N>c+10^{-n}$, что вместе с первым неравенством дает $a_n>c+10^{-n}$. Так как d_n не превосходит $c+10^{-n}$, отсюда следует, что $d_n<a_n$ в противоречии с тем фактом, что все a лежат левее d_n. Это противоречие показывает, что $a_n \leqslant c$ при всех n. Чтобы доказать, что при всех n и $c \leqslant b_n$, допустим, что $b_N<c$ при некотором N. Тогда $c-b_N>0$, и мы можем выбрать целое число n, большее N, такое, что

$$10^n > \frac{1}{c-b_N}.$$

Тогда одновременно $b_n \leqslant b_N$ и $10^{-n}<c-b_N$ и, значит, $b_n<c-10^{-n}$. Из этого неравенства и из выписанного ранее неравенства для c_n следует, что $b_n<c_n$. Так как все a лежат левее всех b, то это означает, что все a лежат левее c_n. Мы пришли к противоречию и, сле-

довательно, $c \leqslant b_n$ при всех n. Это доказывает, что $c \in I_n$ при всех n, и завершает доказательство теоремы.

Мы могли бы теперь точно показать, как наша теорема о полноте позволяет решать уравнения того типа, которые мы рассматривали в этом параграфе. Но все эти результаты содержатся в главной теореме части I (см. § 1), и потому мы будем продолжать разрабатывать ее доказательство.

Упражнения

1. Показать, что $\sqrt{3}$ не есть рациональное число. (*Указание*: показать, что если квадрат некоторого целого числа делится на 3, то и само это число делится на 3, или, эквивалентно, показать, что квадрат всякого целого числа, не делящегося на 3 (т. е. имеющего вид $3k+1$ или $3k+2$), не делится на 3.)
2. Дать другое доказательство неразрешимости уравнения $2n^2=m^2$ в целых числах m, n, опирающееся на теорему о том, что каждое целое число может быть единственным образом представлено в виде произведения простых множителей. (*Указание*: сравнить число множителей 2 в каждой части уравнения.)
3. Показать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом, доказав (с помощью теоремы о единственном разложении на простые множители), что уравнение $2n^3=m^3$ не имеет решения в целых числах.
4. Показать, что уравнение $y^2=2x^2$ не имеет решения в рациональных числах x, y, отличного от $(0, 0)$.
5. Показать, что не существует таких целых чисел k, m и n, что
$$\left(\frac{k+m\sqrt{2}}{n}\right)^3=2.$$
6. Если $S=a_1+a_2+a_3+\ldots$ — бесконечный ряд, то конечные суммы
$$S_0=0,\quad S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\ \ldots,$$
$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ldots$$
называются *частичными* суммами этого ряда. Показать, что частичные суммы бесконечного ряда
$$1-\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{10^n}+\ldots$$
определяют регулярно стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков. Какова сумма этого ряда?

7. Показать, что частичные суммы бесконечного ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

определяют стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков, пересечение которых есть сумма этого ряда. Какова эта сумма?

8. Показать, как процесс деления углом числа 12,27 на число 3,41 приводит к регулярно стягивающейся последовательности замкнутых промежутков.

9. Найти $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,01 с помощью метода стягивающихся промежутков.

10. Показать, что каждый открытый промежуток (a, b), где $a<b$, содержит некоторое рациональное число, а также и некоторое иррациональное число. Показать, что множество Q всех рациональных чисел не является ни замкнутым, ни открытым в R.

11. Доказать теорему Дедекинда о «сечениях» в области действительных чисел: если A и B — два непустых множества в R, таких, что $R=A\cup B$ и каждое число из A меньше, чем каждое число из B, то существует такое действительное число, которое является либо самым большим числом из A, либо самым маленьким числом из B.

§ 6. Компактность

Множество $X\subset R^m$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором достаточно большом шаре, т. е. если существуют такие точка x_0 и число $r>0$, что $X\subset N(x_0, r)$. Примерами ограниченных множеств служат отрезки, окружности, сферы, треугольники и т. д. Вот примеры неограниченных множеств: прямые, лучи, плоскости, множество точек, лежащих вне произвольного круга в R^2, все пространство R^m и множество рациональных чисел. Интуитивно, множество не ограничено, если по нему можно удаляться в бесконечность.

Наиболее важное и замечательное свойство, которым обладает любое множество $X\subset R^m$, одновременно замкнутое в R^m и ограниченное, состоит в том, что образ fX при любом непрерывном отображении $f\colon X\to R^m$ также является замкнутым и ограниченным. Доказательство этого факта провести прямо не удается. Оно развивалось постепенно, начиная с работ Коши (1789—1857 г.), и прошло через много этапов. В частности оно включает предложения анализа, часто называемые теоремой Больцано — Вейерштрасса и теоремой Гейне — Бореля.

Главная наша цель — доказать этот факт. Мы сначала покажем, что свойство быть замкнутым и ограниченным эквивалентно другому свойству, называемому «компактностью». Это — основная часть рассуждения. Коль скоро она проведена, легко показать, что образ fX компактен, если X компактно и функция f непрерывна. Мы подойдем к определению компактности, выявив общее свойство неограниченных множеств и незамкнутых множеств.

Пусть X — неограниченное множество в R^m и x_0 — точка в R^m. Представим себе последовательность окрестностей $N(x_0, r)$, где радиус r принимает значения $r=1, 2, 3, \ldots$. Они образуют расширяющуюся последовательность открытых множеств, объединение которых равно всему R^m, так как для каждой точки $x \in R^m$ расстояние $d(x, x_0)$ при некотором достаточно большом r будет меньше r. Таким образом, пересечения $X \cap N(x_0, r)$, где $r=1, 2, 3, \ldots$, образуют расширяющуюся последовательность открытых в X множеств, объединение которых равно всему X; но X не ограничено, и поэтому не равно ни одному из этих множеств. Более того, X не содержится в объединении никакого конечного числа этих множеств, потому что их объединение просто есть наибольшее из них.

Пусть теперь X — ограниченное, но не замкнутое множество в R^m. Тогда в дополнении $R^m - X$ множества X найдется хотя бы одна такая точка y, каждая окрестность $N(y, r)$ которой содержит точки множества X (см. в § 4 определение замкнутого множества). Обозначим через U_k для каждого $k=1, 2, 3, \ldots$ множество точек, лежащих вне круга радиуса $1/k$ с центром y. Каждое U_k является открытым в R^m множеством, потому что если $x \in U_k$, то $N(x, d(x, y) - 1/k)$ есть окрестность точки x, содержащаяся в U_k. Множества U_k образуют расширяющуюся последовательность $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, и их объединение совпадает с дополнением к точке y, так как для каждой точки $x \neq y$ существует такое k, что $1/k < d(x, y)$. Отсюда следует, что пересечения $X \cap U_k$ образуют расширяющуюся последовательность открытых в X множеств, объединение которых равно всему X; но X не равно ни одному из этих множеств, так как каждая окрестность $N(y, 1/k)$ содержит точки из X. Более того, X не содержится в объединении никакого конечного числа этих множеств, потому что их объединение просто есть наибольшее из них.

Таким образом, если X не ограничено или не замкнуто, то в X можно найти такую расширяющуюся последовательность открытых в X множеств, что объединение всех множеств этой последовательности равно X, но объединение никакого конечного числа этих множеств не равно X. Это приводит нас к определению компактности. Сначала, однако, нам потребуется определение «открытого покрытия».

Определения. Пусть X — множество в R^m. Совокупность C подмножеств R^m называется *покрытием* множества X, если объеднинение этих множеств содержит X, т. е. если каждая точка множества X принадлежит хотя бы одному из множеств, входящих в C. Покрытие C множества X называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа множеств. Говорят, что покрытие C множества X *содержит* покрытие D множества X, если каждое множество из D входит и в C. Покрытие множества X называется *открытым*, если каждое входящее в него множество открыто в X. Наконец, пространство X называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное покрытие, т. е., иначе говоря, если из любой бесконечной совокупности открытых в X множеств, объединение которых равно X, можно выделить конечную совокупность множеств, объединение которых тоже равно X.

Если X не ограничено или не замкнуто в R^m, то построенная выше расширяющаяся последовательность открытых множеств является открытым покрытием X. Объединением любого конечного числа множеств этого покрытия является наибольшее из этих множеств. Так как ни одно из них не совпадает со всем X, то отсюда следует, что X не покрывается никаким конечным числом множеств этого покрытия. Поэтому X не компактно. Теперь мы сформулируем этот результат в положительной форме:

Теорема 6.1. *Каждое компактное подмножество R^m ограничено и замкнуто в R^m.*

В конечном счете нам нужно доказать и обратное утверждение: каждое ограниченное и замкнутое подмножество R^m компактно. Это доказательство более трудно, и оно будет проведено в несколько этапов. (Единственными множествами, про которые мы можем сказать, что они очевидным образом компактны, являются множества, состоящие из конечного числа точек: из любого покрытия такого множества нужно просто выбрать по одному множеству, содержащему каждую данную точку.) Первый нетривиальный случай представляет промежуток. Его мы и рассмотрим на первом шаге доказательства.

Любой замкнутый промежуток $I=[a, b]$ компактен.

Чтобы это доказать, предположим, напротив, что C — открытое покрытие промежутка I, не содержащее никакого конечного покрытия, и приведем это к противоречию. Исходя из этого предположения, мы построим стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков $I=I_0\supset I_1\supset I_2\supset\ldots$, каждый из которых является половиной предыдущего и ни один из которых не покрывается никаким конечным числом множеств из C. Затем с помощью теоремы о полноте из § 5 покажем, что в действительности один из этих промежутков содержится всего лишь в одном множестве покрытия C, — противоречие.

Для построения стягивающейся последовательности заметим, что $I_0=I$ по предположению не покрывается никаким конечным числом элементов покрытия C. Середина промежутка I_0 разбивает его на два замкнутых промежутка I_0' и I_0'', объединением которых является I_0. По крайней мере один из промежутков I_0' и I_0'' также не покрывается конечным числом элементов покрытия C. В самом деле, если бы C содержало конечное покрытие C' промежутка I_0' и конечное покрытие C'' промежутка I_0'', то объединение $C' \cup C''$ было бы конечным покрытием промежутка I_0. Выберем половину промежутка I_0, не покрываемую конечным числом элементов покрытия C, и обозначим ее I_1. (В случае, когда этим свойством обладают обе половины, чтобы сделать выбор вполне определенным, возьмем правую половину.) Затем разделим пополам промежуток I_1 и поступим, как и прежде. Если в соответствии с этим правилом уже построены промежутки $I_0, I_1, \ldots, I_{k-1}$, то, рассуждая, как и раньше, мы увидим, что поскольку конечным числом элементов покрытия C не покрывается промежуток I_{k-1}, этим свойством будет обладать и хотя бы одна из его половин. Выберем такую половину и обозначим ее I_k. Тем самым завершено индуктивное доказательство существования стягивающейся последовательности.

В силу полноты R (см. § 5) найдется точка x, принадлежащая всем I_k. Так как $x \in I$ и C покрывает промежуток I, существует открытое множество U, входящее в C и такое, что $x \in U$. Поэтому найдется такое число $r>0$, что $N(x, r, I) \subset U$. Далее, промежутки

$$I_0, I_1, \ldots, I_k, \ldots$$

содержат x и имеют убывающие длины

$$(b-a), \frac{b-a}{2}, \ldots, \frac{b-a}{2^k}.$$

Если мы выберем k настолько большим, чтобы $(b-a)/2^k<r$, то I_k будет целиком лежать в $N(x, r, I)$. Итак, мы получили противоречие: существует такое k, что

$$I_k \subset N(x, r, I) \subset U,$$

так что промежуток I_k покрывается одним единственным множеством из покрытия C, хотя ни один из промежутков нашей последовательности нельзя было покрыть конечным числом элементов этого покрытия. Это противоречие показывает, что замкнутый промежуток I компактен.

Прежде чем перейти к следующему случаю, необходимо дать еще одно определение. Множество $B \subset R^m$ называется *т-мерным параллелепипедом*, если существуют такие пары чисел $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, что B состоит из всех точек x, координаты $(x_1, \ldots, x_m)$ которых удовлетворяют при $i = 1, \ldots, m$ условиям $a_i \leqslant \leqslant x_i \leqslant b_i$. В случае $m = 1$ B есть замкнутый промежуток.

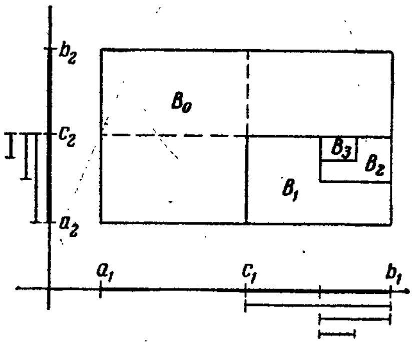


Рис. 6.1.

При $m = 2$ B есть прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, вместе с его внутренностью. При $m = 3$ B есть прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, вместе с его внутренностью.

Мы должны также научиться *подразделять* параллелепипед B на меньшие параллелепипеды. Это делается следующим образом. Разобьем каждый промежуток $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, его серединой c_i на два промежутка; каждый из параллелепипедов подразделения имеет своим i-м промежутком или $[a_i, c_i]$ или $[c_i, b_i]$. Таким образом, при $m = 2$ прямоугольник прямыми $x_1 = c_1$ и $x_2 = c_2$ подразделяется на $4 = 2^2$ равных прямоугольника, ребра которых вдвое короче соответствующих ребер прямоугольника B (рис. 6.1).

При $m=3$ параллелепипед тремя плоскостями $x_1=c_1$, $x_2=c_2$ и $x_3=c_3$ подразделяется на $8=2^3$ равных параллелепипедов, ребра которых вдвое короче соответствующих ребер параллелепипеда B. В общем случае m-мерный параллелепипед B подразделяется m гиперплоскостями $x_i=c_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ на 2^m равных параллелепипедов, ребра которых вдвое короче ребер B.

Любой m-мерный параллелепипед B компактен.

Мы докажем это с помощью процесса, аналогичного тому, который был использован для одномерного параллелепипеда, т. е. замкнутого промежутка. Предположим, напротив, что существует открытое покрытие C параллелепипеда B, не содержащее никакого конечного его покрытия. Мы построим стягивающуюся последовательность параллелепипедов $B_0, B_1, \ldots$ $\ldots, B_k, \ldots$, где $B_0=B$, ни один из которых не покрывается никаким конечным числом множеств из C, причем при каждом $k>0$ параллелепипед B_k будет одним из 2^m параллелепипедов подразделения B_{k-1}. По предположению параллелепипед $B_0=B$ не покрывается конечным числом элементов C (мы начинаем индуктивное построение последовательности). Допустим, что параллелепипеды $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ уже построены и обладают описанными свойствами. Рассмотрим 2^m параллелепипедов подразделения B_{k-1}. Если бы каждый из них покрывался некоторой конечной совокупностью множеств из C, то объединение всех этих 2^m совокупностей составило бы конечную совокупность множеств из C, покрывающую B_{k-1}. Так как это невозможно, по крайней мере один из этих маленьких параллелепипедов подразделения B_{k-1} не покрывается конечным числом элементов покрытия C. Выберем в качестве B_k один из таких параллелепипедов. Это завершает индуктивное доказательство существования последовательности $B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots$. (Рис. 6.1 иллюстрирует первые три шага при $m=2$.)

Мы утверждаем, что найдется точка x, принадлежащая всем B_k. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим проекции параллелепипедов нашей последователькости на i-ю ось координат ($i=1, 2, \ldots, m$). На каждой оси эти проекции образуют стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков. Пусть x_i — общая точка всех промежутков, являющихся проекциями параллелепипедов на i-ю ось координат. Тогда точка $x \in R^m$ с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ принадлежит B_k при всех k. Так как $x \in B$, найдется открытое множество U из покрытия C, содержащее x. Поэтому существует такое число $r>0$, что $N(x, r, B) \subset \subset U$. Пусть d — длина самого большого ребра параллелепипеда B. Так как все ребра при каждом шаге построения последовательности делятся пополам, длина самого большого ребра параллелепипеда B_k будет равна $d/2^k$. По теореме Пифагора длина диагонали параллелепипеда B_k не превосходит $\sqrt{m}\, d/2^k$. Выберем целое число k столь большим, чтобы

$$2^k > \frac{\sqrt{m}\, d}{r}; \text{ тогда } \frac{\sqrt{m}\, d}{2^k} < r,$$

откуда следует, что

$$B_k \subset N(x, r, B) \subset U.$$

Таким образом, B_k содержится в одном единственном множестве из покрытия C, а это противоречит тому, что B_k не покрывается никаким конечным числом множеств из C. Наше предположение, что параллелепипед B не компактен, привело нас к противоречию; значит B компактен.

Семейство множеств, компактность которых мы можем доказать, сильно расширится после того, как будет доказано следующее полезное предложение.

Теорема 6.2. *Если X — замкнутое подмножество компактного пространства B, то X компактно.*

Чтобы это доказать, возьмем произвольное открытое покрытие C множества X и расширим каждый элемент этого покрытия так, чтобы расширенные множества образовывали открытое покрытие C' пространства B. Воспользовавшись тогда компактностью B, мы выберем из C' конечное покрытие и заметим, что соответствующие нерасширенные множества образуют тогда искомое конечное покрытие множества X.

Для каждого множества U из открытого покрытия C множества X положим $U'=U\cup(B-X)$ и обозначим через C' совокупность этих множеств U'. Прежде всего убедимся в том, что U' открыто в B. Точка $x\in U'$ принадлежит либо U, либо $B-X$. Если $x\in B-X$, то из предположения о замкнутости X в B следует, что найдется такое $r>0$, что $N(x,r,B)\subset \subset(B-X)\subset U'$. Если $x\in U$, то, поскольку U открыто в X, существует такое $r>0$, что $N(x,r,X)\subset U$, и потому $N(x,r,B)\subset U\cup(B-X)=U'$. Это доказывает, что U' открыто в B.

Пусть теперь y — любая точка пространства B; тогда либо $y\in X$, либо $y\in B-X$. Если $y\in X$, то y принадлежит некоторому $U\in C$, так что $y\in U'$ для соответствующего $U'\in C'$. Если $y\in B-X$, то y принадлежит всем $U'\in C'$. Следовательно, C' — открытое покрытие пространства B. Поскольку B компактно, конечное число множеств из C', скажем множества $U_1', U_2',\ldots, U_k'$, покрывают B, а, значит, и X. Отсюда следует, что соответствующие множества из C, а именно $U_1, U_2, \ldots, U_k$, образуют конечное покрытие множества X; в самом деле, каждая точка из X, покрываемая множеством U_j', покрывается и множеством U_j. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы в состоянии доказать теорему, обратную теореме 6.1, включив наше замкнутое и ограниченное множество в некоторый m-мерный параллелепипед (который, как было показано, компактен) и затем применив теорему 6.2.

Теорема 6.3. *Каждое замкнутое и ограниченное подмножество пространства R^m компактно.*

Пусть X замкнуто в R^m и ограничено. Так как X ограничено, найдутся такие точка $b\in R^m$ и число $r>0$, что $X\subset N(b, r)$. Пусть B есть m-мерный параллелепипед с центром b, все ребра которого равны $2r$;

точнее, точка $y \in R^m$ принадлежит B, если ее координаты $(y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяют условиям

$$b_i - r \leqslant y_i \leqslant b_i + r \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда B содержит $N(b, r)$ и, следовательно, $B \supset X$. Поэтому $X \cap B = X$. Далее, X замкнуто в B. В самом деле, X замкнуто в R^m, а по теореме 4.4′ пересечение B с замкнутым множеством в R^m замкнуто в B. Требуемое заключение о компактности X вытекает теперь из предыдущей теоремы.

Итак, мы установили эквивалентность свойства множества быть компактным и свойства быть замкнутым и ограниченным в R^m. Теперь мы подготовлены для доказательства главного предложения этого параграфа.

Теорема 6.4. *Пусть X — компактное пространство, и пусть функция $f\colon X \to Y$ непрерывна, тогда образ fX компактен.*

Доказательство. Пусть C — открытое покрытие множества fX. Мы хотим доказать, что C содержит некоторое конечное покрытие этого множества. Для каждого $U \in C$ рассмотрим прообраз $f^{-1}U$ и обозначим через C' совокупность всех таких прообразов. Так как функция f непрерывна, а U открыто в fX, каждый прообраз $f^{-1}U$ открыт в X. Поскольку C есть покрытие множества fX, образ fx любой точки $x \in X$ лежит в некотором $U \in C$, и потому x лежит в соответствующем $f^{-1}U$. Таким образом, C' есть открытое покрытие пространства X. Так как X компактно, существует конечная совокупность D' элементов покрытия C', покрывающая X. Соответствующая совокупность D элементов покрытия C конечна и покрывает fX. Действительно, если $x \in f^{-1}U$ и $f^{-1}U$ входит в D', то $fx \in U$, причем $U \in D$. Итак, C содержит конечное покрытие множества fX. Следовательно, fX компактно.

Из теоремы 6.4 немедленно вытекает

Следствие. *Если X — замкнутое и ограниченное множество в R^m и функция $f\colon X \to R^n$ непрерывна, то fX — замкнутое и ограниченное множество в R^n.*

Чтобы связать предыдущее исследование с главной целью части I — доказательством теоремы из § 1, нам нужно еще установить одно важное свойство компактных множеств на прямой.

Теорема 6.5. *Компактное непустое множество X действительных чисел имеет максимум и минимум. Иными словами, существуют такие числа $m \in X$ и $M \in X$, что m есть наименьшее, а M — наибольшее число множества X.*

Чтобы оценить силу этого заключения, заметим прежде всего, что множество R всех действительных чисел не имеет ни наименьшего, ни наибольшего числа. На самом деле любое неограниченное множество Y чисел обязательно не имеет либо максимума, либо минимума, так как если бы оно имело и тот и другой, то любой открытый промежуток, содержащий и максимум, и минимум, содержал бы и все Y, и тогда множество Y было бы ограничено. Заметим далее, что существуют и ограниченные множества, не имеющие ни максимума, ни минимума. Например, у открытого промежутка (a, b) нет ни наибольшего, ни наименьшего числа. Эти примеры показывают, что если мы хотим добиться, чтобы выполнялось заключение теоремы, то должны потребовать, чтобы X было ограниченным и удовлетворяло некоторому дополнительному условию, которому не удовлетворяет открытый промежуток. Так как компактное множество ограничено и замкнуто, одно лишь условие компактности гарантирует ограниченность и исключает открытые промежутки.

Приступим к доказательству теоремы. Так как X компактно, оно ограничено; поэтому найдется замкнутый промежуток $I_0=[a_0, b_0]$, содержащий X. Мы построим стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков $I_0, I_1, \ldots, I_k, \ldots$, обладающую следующими свойствами: каждый промежуток I_k является половиной промежутка I_{k-1}, каждый промежуток I_k содержит хотя бы одну точку множества X, и, наконец, правый конец b_k промежутка I_k является верхней границей множества X — это значит, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant b_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, I_0 содержит точки множества X (так как X не пусто) и b_0 является верхней границей множества X. Предположим, что уже построены промежутки I_0, I_1, ..., I_{k-1}, обладающие указанными свойствами. Пусть c — середина промежутка $I_{k-1}=[a_{k-1}, b_{k-1}]$. Если c — верхняя граница множества X, то возьмем $I_k=[a_{k-1}, c]$, а в противном случае положим $I_k=$ $=[c, b_{k-1}]$. Тогда I_k обладает нужными свойствами.

В силу полноты R (см. § 5) существует число M, принадлежащее всем I_k. Покажем сначала, что M принадлежит X. Допустим, что это не так. Поскольку X — замкнутое множество, дополнение $R-X$ открыто. Поэтому найдется такое $r>0$, что $N(M, r) \subset R-X$. Если d — длина промежутка I_0, то длина I_k равна $d/2^k$. Для достаточно большого номера k мы будем иметь $d/2^k<r$, так что I_k будет содержать M и иметь длину, меньшую, чем r. Значит,

$$I_k \subset N(M, r) \subset R-X.$$

Это противоречит тому, что каждый промежуток I_k должен содержать точки множества X. Отсюда следует, что M принадлежит X.

Покажем теперь, что M является наибольшим числом из X. Допустим, что, напротив, существует такое $x \in X$, что $x>M$. Положим $r=x-M$, так что $r>0$, и выберем столь большое целое k, чтобы $d/2^k<r$. Так как $M \in I_k$ и длина промежутка I_k меньше r, отсюда следует, что $b_k<x$. Таким образом, b_k не является верхней границей множества X, хотя оно обязано быть ею по построению. Это противоречие доказывает, что M — наибольшее число из множества X.

Доказательство существования минимума протекает аналогично. Стягивающаяся последовательность замкнутых промежутков выбирается так, чтобы каждый промежуток содержал точки множества X и чтобы его *левый* конец был *нижней* границей множества X. Детали доказательства предоставляются читателю. Существование минимума можно также вывести из существования максимума с помощью отображения $f\colon R \to R$, определяемого условием $fx=-x$. Так как

X компактно, то по теореме 6.4 и fX компактно. Поэтому fX имеет максимум, скажем M'. Но тогда fM' будет искомым минимумом множества X.

Последняя теорема этого параграфа дает одну часть заключения главной теоремы, сформулированной в § 1.

Теорема 6.6. *Если X — замкнутое, ограниченное, непустое подмножество R^m и если $f: X \to R$ — непрерывная действительная функция, определенная на X, то образ fX имеет максимум M и минимум m.*

Так как X замкнуто и ограничено, оно компактно. Поскольку оно компактно и функция f непрерывна, компактен и образ fX. Раз fX — компактное непустое множество действительных чисел, то предыдущая теорема гарантирует нам существование m и M. Это завершает доказательство.

Упражнения

1. Показать, что любое подмножество ограниченного множества ограничено.
2. Показать, что объедииенне двух ограничеиных множеств ограничено и что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.
3. Прнвести пример бесконечиой последовательности ограничеиных мпожеств, объединение которых не ограиичено.
4. Найтн расширяющуюся последовательность открытых подмножеств $U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$ полуоткрытого промежутка $X=(a, b)$, объединение которых совпадает с X, хотя ни одио из них не равио X.
5. Пусть D — круг в R^2 с центром x_0 и радиусом 1, т. е. D состоит из всех точек $x \in R^2$, удовлетворяющих условию $d(x, x_0) \leqslant 1$. Решить предыдущую задачу для мпожества X, получающегося, если из D удалить точку x_0. Сделать то же самое для множества X, получающегося из D удалением какой-либо точки его границы, т. е. точки y_0, для которой $d(y_0, x_0)=1$.
6. Пусть X — замкнутый промежуток $[0, 10] \subset R$. Показать, что множество C всех открытых промежутков в R длины 1 является покрытием X. Найти конечную совокупность множеств из C, покрывающую X. Каково наименьшее чнсло таких промежутков в покрытии множества X?
7. Пусть C_r — окружность в R^2 с центром x_0 н радиусом r. Для каждой точки c единичной окружности, т. е. точкн $c \in C_1$, обозиачим через T_c прямую, касательную к окружности C_1 в точке c. Тогда $R^2 - T_c$ разбивается на две откры-

тые полуплоскости; пусть U_c — та из ннх, которая не содержнт x_0. Показать, что совокупность C таких полуплоскостей U_c для всех $c \in C_1$ покрывает множество точек, лежащих вне C_1. Почему при $r>1$ должна существовать конечная совокупность элементов из C, покрывающая C_r? Показать, что при $r>2$ окружность C_r может быть покрыта тремя множествами из C, но не может быть покрыта двумя. Показать, что прн r, удовлетворяющем условию $\sqrt{2}<r\leqslant 2$, окружность C_r может быть покрыта четырьмя множествами из C, но ие может быть покрыта тремя. Показать, что при r, удовлетворяющем условию $2/\sqrt{3}<r\leqslant\sqrt{2}$, окружность C_r может быть покрыта шестью множествами нз C и не может быть покрыта четырьмя. Может ли открытое кольцо между окружностями C_1 и C_2 быть покрыто конечным числом множеств из C?

8. Показать, что объединение двух компактных множеств есть компактное множество. Точно так же объеднненне конечного чнсла компактных миожеств компактно.
9. Привести пример бесконечной совокупности компактных множеств, объедииеине которых не компактно.
10. Показать, что если $X \subset Y$ и X компактно, то X замкнуто в Y.
11. Указать ограииченное подмножество X множества рациональных чнсел Q, замкнутое в Q и не имеющее ни максимума, ни минимума.
12. Показать, что при любом натуральном n существует непрерывное отображенне промежутка $I=[-1, 1]$ на промежуток $[-n, n]$. Существует ли непрерывное отображеиие промежутка I на всю действительную прямую R? Построить иепрерывное отображеиие открытого промежутка $(-1, 1)$ на всю прямую R.
13. Показать, что множество $X\subset R^m$ компактно в том н только в том случае, если каждое покрытие множества X открытымн в R^m множествами содержит конечиое покрытие.

§ 7. Связность

Для доказательства главной теоремы части I необходимы два важных топологических свойства замкнутого промежутка. Первое из них, компактность, было рассмотрено в § 6. Теперь мы обсудим второе свойство, называемое «связностью».

Некоторые пространства можно естественным образом разбить на две или большее число частей. Например, пространство, состоящее из двух непересекающихся прямых, можно разбить на две эти прямые. Вот другой пример: дополнение к окружности в плоскости состоит из двух частей — точек, лежащих внутри окружности, и точек, лежащих вне ее. Еще пример: если p — точка прямой L, то дополнение точки в L естественно распадается на две определяемые ею полупрямые (удаление точки p разбивает L на две части).

В каждом из предыдущих примеров пространство естественно разбивается на части лишь единственным способом. Множество Q рациональных чисел допускает такое разбиение многими способами. Каждое иррациональное число x порождает разбиение множества Q на множество тех рациональных чисел, которые меньше x, и тех, которые больше x. Множество иррациональных чисел аналогичным образом разбивается каждым рациональным числом.

С другой стороны, некоторые множества нельзя разбить на части никаким естественным способом; это верно, например, для прямой, прямолинейного отрезка, плоскости и круга.

Конечно, возможно и насильственное разбиение пространства. Например, если I — промежуток $[a, b]$ и c — число, удовлетворяющее условию $a<c<b$, то c разбивает I на два промежутка $[a, c]$ и $[c, b]$. Однако, поскольку они имеют общую точку c, это разбиение нельзя рассматривать как настоящее разбиение. Мы получим настоящее разбиение, если выбросим из одного из этих промежутков, скажем из второго, точку c. Пусть $A=[a, c]$ и $B=(c, b]$; тогда $A \cup B=I$ и $A \cap B=\varnothing$. Но такое разбиение или «разрыв» промежутка I мы не считаем естественным, потому что множество B «врезается» в точке c в множество A. Если мы удалим точку c и из A, чтобы устранить это «врезание», то $A \cup B \neq I$, но $A \cup B$ будет дополнением точки c в I, т. е. этот пример похож на пример дополнения точки p в прямой L.

Теперь нам нужно дать точное определение.

Определение. *Разбиением* пространства X называется пара A, B непустых множеств X, таких, что $A \cup B=X$, $A \cap B=\varnothing$ и A и B открыты в X. Пространство, не допускающее никакого разбиения, называется *связным*.

Рассмотрим, например, дополнение X окружности C в плоскости. Пусть A — множество точек, лежащих *внутри* окружности, а B — множество точек, лежащих *вне* ее. Иными словами, A состоит из всех точек множества X, расстояние которых от центра окружности C меньше, чем радиус C, а B — дополнение множества A в X. Условия, определяющие разбиение, легко проверить. Тот факт, что A и B открыты в X, очевиден из рис. 7.1: каждая точка множества A имеет окрестность, содержащуюся в A, а каждая точка B имеет окрестность, лежащую в B.

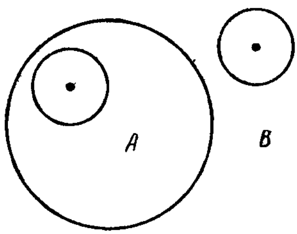


Рис. 7.1.

Пусть L — прямая, p — точка прямой L и X — дополнение точки p в L. Пусть A — множество точек прямой L, лежащих левее p (рис. 7.2), а B — множество точек, лежащих правее p. Снова каждая точка

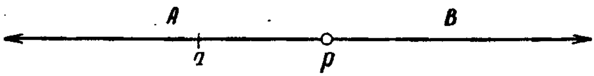


Рис. 7.2.

множества A имеет окрестность, содержащуюся в A, а каждая точка множества B — окрестность в B.

Вспомним теперь «насильственное» разбиение промежутка $I=[a, b]$ на промежутки $A=[a, c]$ и $B=(c, b]$. Если мы проверим условия разбиения, то увидим, что все они, за исключением одного, выполняются: A не открыто в I, потому что никакая окрестность точки $c \in A$ не лежит целиком в A.

Эти предварительные рассмотрения показывают, что определения разбиения и связного пространства точно выражают ту грубую геометрическую идею, которую мы имели в виду, а теоремы, которые мы докажем ниже, полностью эти определения оправдают.

Определение разбиения можно высказать несколькими эквивалентными способами. Так как A и B

взаимно дополнительны в X, то каждое из них открыто в том и только в том случае, если другое замкнуто. Таким образом, мы могли бы в равной мере требовать, чтобы A и B были замкнутыми в X. Кроме того, мы могли бы отбросить явное упоминание о B и сказать, что разбиение пространства X есть множество $A \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым в X, не пустым и не совпадающим со всем X. Тогда его дополнение B в X будет обладать теми же свойствами. (Напомним, что пустое множество $\varnothing$ и X одновременно открыты и замкнуты в X.)

Таким образом, разбиение A, B пространства X определяется любым из следующих требований:

1. A и B — непустые открытые подмножества X, такие, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$.

2. A и B — непустые замкнутые подмножества X, такие, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$.

3. A — подмножество X, одновременно открытое и замкнутое в X и не равное ни $\varnothing$, ни X.

Обычно легче доказать, что некоторое пространство несвязно, чем то, что оно связно. В первом случае нужно только указать разбиение и проверить, что оно удовлетворяет требуемым условиям, в то время как во втором случае нужно нечто доказать обо *всех* открытых в X множествах, отличных от $\varnothing$ и от X, именно, что каждое такое множество не замкнуто в X. Следующие теоремы не только показывают, что связны некоторые простые пространства, но и дают средства для установления связности многих пространств.

Теорема 7.1. *Замкнутый промежуток является связным множеством.*

Пусть I — замкнутый промежуток в R, и A — замкнутое множество в I, не равное ни $\varnothing$, ни I. Чтобы доказать теорему, покажем, что A не открыто в I. Так как $A \neq \varnothing$ и $A \neq I$, найдутся точки $a \in A$ и $b \in I - A$. Пусть I' — промежуток $[a, b]$ (или $[b, a]$, если $b < a$). На рис. 7.3 изображен промежуток I, составленный из подмножеств A и B, где A — некоторое замкнутое множество, а B — его дополнение в I. Так как A и I'

замкнуты, то замкнуто и их пересечение $A \cap I'$. Поскольку пересечение $A \cap I'$ кроме того и ограничено, оно компактно. По теореме 6.5 множество $A \cap I'$ имеет минимум m и максимум M. Если $a<b$, то $m=a$, так как a — левый конец промежутка I'. Правый конец b этого промежутка не принадлежит A, и потому $m=a \leqslant \leqslant M < b$. Отсюда следует, что каждая окрестность точки M содержит числа, лежащие между M и b; эти

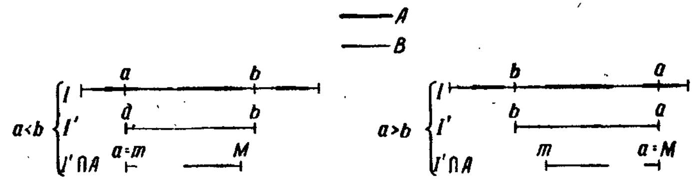


Рис. 7.3.

числа не входят в A и, значит, A не открыто. Если $a>b$, то $M=a$, $b<m\leqslant a$, и каждая окрестность точки m содержит числа, лежащие между b и m; эти числа не принадлежат A, так что и на этот раз A не открыто. Это доказывает, что единственными одновременно открытыми и замкнутыми подмножествами промежутка I являются I и $\varnothing$. Следовательно, промежуток I связен.

Теорема 7.2. *Если f: $X \to Y$ — непрерывное отображение и A, B — некоторое разбиение образа fX, то прообразы $A'=f^{-1}A$ и $B'=f^{-1}B$ образуют разбиение пространства X.*

Мы должны проверить, что пара A', B' удовлетворяет каждому из условий в определении разбиения. Так как A не пусто, существует точка $y \in A$. Так как $A \subset fX$, существует точка $x \in X$, для которой $fx=y$. Тогда $x \in A'$ и потому A' не пусто. Точно так же и B' не пусто. Образ любой точки $x \in X$ принадлежит $fX=A \cup B$, так что $fx \in A$ или $fx \in B$. В соответствии с этим и $x \in A'$ или $x \in B'$. Это показывает, что $X=A' \cup B'$. Если бы нашлась точка x, общая для A' и B', то ее образ fx принадлежал бы и A, и B, что невозможно.

Поэтому $A' \cap B' = \varnothing$. Наконец, так как A и B открыты в fX и отображение f непрерывно, их прообразы открыты в X (см. теорему 4.5). Тем самым доказано, что A', B' есть разбиение пространства X.

Теорему 7.2 можно сформулировать короче: *если функция f непрерывна и fX несвязно, то и X несвязно.* Поэтому эквивалентное утверждение таково:

Следствие. *Если функция f: $X \to Y$ непрерывна и X связно, то и fX связно.*

В такой форме это предложение нам более полезно; например, оно позволяет доказать такое

Следствие. *Каждый прямолинейный отрезок есть связное множество.*

Доказательство. Если L — прямолинейный отрезок и I — некоторый замкнутый промежуток, то существует подобие f: $I \to L$, так что $fI = L$. Поскольку подобие непрерывно (см. § 3) и промежуток I связен, отсюда следует, что и отрезок L связен.

Интуитивно очевидно, что два прямолинейных отрезка, пересекающихся в некоторой точке, вместе образуют связное множество. Доказательство этого факта основывается на двух следующих леммах.

Лемма 7.3. *Если X несвязно и A, B — разбиение пространства X, то каждое связное подмножество X целиком лежит или в A, или в B.*

Пусть C — подмножество X, содержащее некоторую точку множества A и некоторую точку множества B. Тогда пересечения $C \cap A$ и $C \cap B$ не пусты, каждое из них открыто в C, их объединение равно C, а их пересечение пусто. Следовательно, C несвязно. Это показывает, что связное подмножество не может пересекаться и с A, и с B.

Лемма 7.4. *Если два связных множества Z и W имеют общую точку, то их объединение $Z \cup W$ связно.*

Допустим, что, напротив, множество $Z \cup W$ имеет разбиение A, B. Пусть c — общая точка Z и W. Если $c \in A$, то Z и W являются связными подмножествами объединения $Z \cup W$, содержащими точку из A. По лемме 7.3 (в которой нужно положить $X = Z \cup W$) Z и W целиком лежат в A. Поэтому B должно быть пустым. В случае если $c \in B$, мы найдем, что Z и W целиком лежат в B, и тогда $A = \varnothing$. В любом случае мы приходим к противоречию; следовательно, $Z \cup W$ связно.

Простое применение леммы 7.4 показывает, что два прямолинейных отрезка, имеющих общую точку, вместе образуют связное множество; последовательно присоединяя по одному отрезку, мы можем заключить, что любая ломаная есть связное множество.

Следующая теорема служит важным орудием для доказательства связности некоторых пространств.

Теорема 7.5. *Пространство X связно в том и только в том случае, если каждая пара его точек лежит в некотором связном его подмножестве.*

Доказательство той части теоремы, в которой утверждается, что если X связно, то каждая пара его точек лежит в некотором связном подмножестве, тривиально, так как X является своим собственным связным подмножеством, содержащим каждую пару своих точек.

Чтобы доказать вторую половину теоремы, предположим, что каждая пара точек из X лежит в некотором связном подмножестве X, и допустим, что X несвязно. Пусть A, B — разбиение X, и пусть $x \in A$ и $y \in B$ (вспомним, что A и B не пусты). По предположению, найдется связное подмножество $C \subset X$, содержащее x и y. Однако по лемме 7.3 C целиком лежит либо в A, либо в B. Это противоречие показывает, что X не может иметь разбиения. Следовательно, X связно, и теорема доказана.

Напомним, что множество в пространстве R^n называется *выпуклым*, если оно содержит все прямолинейные отрезки, соединяющие любые две его точки (например, множество точек плоскости, лежащих внутри произвольной окружности, выпукло, а множество точек, лежащих вне ее, не выпукло). Так как прямолинейные отрезки связны, из теоремы 7.5 вытекает

Следствие. *Каждое выпуклое множество связно.*

Для того чтобы множество было связным, оно не обязательно должно быть выпуклым. Хотя множество точек, лежащих вне окружности, не является выпуклым, оно, тем не менее, связно, потому что любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом множестве (рис. 7.4). Точно так же и любые две

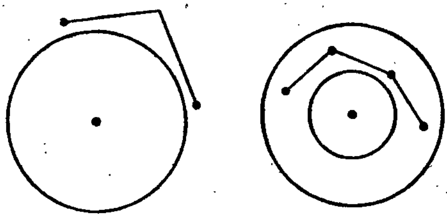


Рис. 7.4.

точки кольцеобразной области, ограниченной двумя окружностями, можно соединить ломаной; поэтому кольцо связно.

Обратимся теперь к изучению подмножеств прямой (т. е. множеств действительных чисел). Нашим заключительным предложением относительно связности будет

Теорема 7.6. *Любое компактное связное множество действительных чисел есть замкнутый промежуток.*

Обратное утверждение, что замкнутый промежуток одновременно компактен и связен, уже было доказано (см. § 6 и теорему 7.1).

Доказательство. Пусть X — произвольное множество действительных чисел, и пусть a и b — числа, принадлежащие X, причем $a<b$. Докажем сначала, что любое число c, удовлетворяющее неравенствам $a<c<b$, также принадлежит X. Точка c определяет разбиение своего дополнения в R. Обозначим через A множество всех чисел, меньших c, а через B — множество всех чисел, больших c. Если бы вопреки на-

шему утверждению X не содержало c, то оно было бы подмножеством объединения $A \cup B$ и, поскольку X связно, по лемме 7.3 оно целиком лежало бы в A или в B. Но X содержит точки a и b, так что это невозможно. Итак, мы показали, что *связное множество действительных чисел содержит все числа, заключенные между любыми двумя его числами.*

Если к тому же X компактно, то теорема 6.5 утверждает, что X имеет минимум m и максимум M. Отсюда следует, что X есть в точности замкнутый промежуток $[m, M]$.

Упражнения

1. Выяснить, будет ли каждое из следующих множеств связным; если оно несвязно, то найти разбиение.
   a) Окружность, из которой удалена одна точка; две точки.
   b) Дуга окружности; дуга, из которой удалена ее середина.
   c) Конечное множество точек; множество, состоящее из единственной точки; пустое множество.
   d) Тор (рис. 7.5)

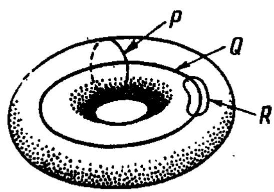


Рис. 7.5.

   (i) из которого удалена окружность P;
   (ii) из которого удалена окружность Q;
   (iii) из которого удалены окружности P и Q;
   (iv) из которого удалена замкнутая кривая R;
   (v) из которого удалены две окружности типа P;
   (vi) из которого удалены две окружности типа Q;
   (vii) вместе с внутренностью, но без двух окружностей типа P;
   e) Объединение двух непересекающихся окружностей на плоскости; пересечение этих двух непересекающихся окружностей.
   f) Пусть A, B, C и D — четыре точки на окружности, расположенные с равными интервалами и в этом порядке. Пусть AB обозначает кратчайшую дугу между A и B, включая ее концы. Ответить на поставленный вопрос для следующих множеств:

   (i) $AB \cup BC$; (ii) $AB \cap BC$; (iii) $AB \cup CD$;
   (iv) $AB \cap CD$; (v) $ABC \cup CDA$.

2. Множество $D \subset R^m$ называется *звездообразным* относительно точки p, если для каждой точки $x \in D$ прямолинейный

отрезок, соединяющий p с x, лежит в D. Показать, что такое множество связно.

3. Показать, что каждое из следующих множеств связно: сфера; внутренность шара; множество точек, лежащих вне сферы; тор; множество точек, лежащих внутри тора; множество точек, лежащих вне тора.
4. Привести пример, показывающий, что прообраз связного множества при непрерывном отображении не обязательно связен.
5. Показать, что радиальная проекция хорды, не являющейся диаметром, и отрезка касательной на окружность непрерывна. Заключить отсюда, что дуги окружности связны.
6. Привести пример двух связных множеств, пересечение которых несвязно.
7. Выяснить, является ли множество точек плоскости, имеющих хотя бы одну рациональную координату, связным; множество точек, имеющих точно одну рациональную координату; точно две рациональные координаты. Если какое-либо из них несвязно, то указать разбиение.
8. Пусть X — множество точек всех окружностей на плоскости с центром $(0, 0)$ и радиусом r, где r — рациональное число. Найти разбиение множества X.
9. Показать, что всякое связное множество действительных чисел является одним из множеств следующих восьми типов: пустое множество, само R, открытая или замкнутая полупрямая, отдельная точка, открытый, замкнутый или полуоткрытый промежутки.
10. Показать, что пересечение стягивающейся последовательности замкнутых промежутков есть или одна точка, или замкнутый промежуток.
11. Дать другое доказательство связности замкнутого промежутка I: предположив, что существует разбиение $I = A \cup B$, постройте стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков, у каждого из которых один конец принадлежит A, а другой — B, и приведите это к противоречию, показав, что точка c, принадлежащая их пересечению, не лежит ни в A, ни в B.

§ 8. Топологические свойства и топологическая эквивалентность

Основной задачей в этих параграфах является доказательство главной теоремы, сформулированной в § 1: если действительная функция fx определена и непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то она имеет наименьшее и наибольшее значения и принимает все промежуточные значения. Мы проделали всю работу, которая требовалась для этого доказательства; нужно только собрать вместе различные его части. Были доказаны следующие три предложения:

1. *Замкнутый промежуток есть компактное и связное множество.*

2. *Непрерывный образ компактного множества компактен, и непрерывный образ связного множества связен.*

3. *Любое компактное связное множество действительных чисел есть замкнутый промежуток.*

Каждое из первых двух предложений получается, если соединить утверждения о компактности, доказанные в § 6, с утверждениями о связности, доказанными в § 7. Третье предложение — это теорема 7.6. Все эти три предложения вместе утверждают, что непрерывный образ в R любого замкнутого промежутка и сам является замкнутым промежутком. Но это — просто другой способ сформулировать главную теорему.

Мы не только доказали нашу главную теорему, но сделали гораздо больше: доказали ряд весьма общих теорем и настолько проанализировали рассуждение, что теоремы, аналогичные главной теореме, могут быть теперь получены без дополнительных трудностей. Например, тот факт, что замкнутое и ограниченное множество компактно (§ 6), вместе с предложениями 2 и 3 позволяют заключить, что

если X — замкнутое, ограниченное и связное множество в R^n и функция $f\colon X \to R$ непрерывна, то образ fX есть замкнутый промежуток.

Одним из многих различных видов замкнутых, ограниченных и связных подмножеств пространства R^n являются сферы в R^3, и мы получаем, в частности, что действительная непрерывная функция, определенная на сфере, имеет наибольшее и наименьшее значение и принимает все промежуточные значения. Теперь мы видим, что предположение главной теоремы, состоящее в том, что областью определения функции f является замкнутый промежуток, чрезмерно стеснительно: достаточно потребовать, чтобы область определения функции f была замкнута, ограничена и связна.

Теперь мы в состоянии приступить к ответу на вопрос: что такое топология?

Определение. Свойство подмножества $X \subset R^m$ называется *топологическим*, если оно эквивалентно некоторому свойству, которое можно сформулировать, пользуясь только понятием открытого в X множества и обычными понятиями теории множеств (элемент, подмножество, дополнение, объединение, пересечение, конечное, бесконечное и т. д.). Короче говоря, свойство множества X является топологическим, если его можно выразить как свойство семейства открытых множеств множества X.

Компактность и связность — топологические свойства. Мы просим читателя внимательно просмотреть в § 6 и 7 определения этих понятий и убедиться, что в них полностью отсутствуют такие свойства множества X как размер, форма, длина, площадь и объем. Точно так же замкнутое множество в X — это топологическое понятие, потому что замкнутое множество определяется как дополнение в X некоторого открытого в X множества.

Если известно, что какое-либо свойство или понятие является топологическим, то мы можем свободно оперировать им при определении других топологических свойств или понятий. Например, для этой цели можно пользоваться понятиями замкнутого множества, компактности и связности.

Вот некоторые примеры топологических свойств конкретных множеств. Прямая L есть связное множество, а дополнение в L любой ее точки несвязно. Иначе говоря, прямая превращается в несвязное множество при удалении любой ее точки. Окружность этим свойством не обладает; однако она превращается в несвязное множество при удалении любых двух ее точек. Отметим некоторые топологические свойства плоскости: она не компактна, связна и не становится несвязной при удалении любого конечного множества точек.

Если какое-нибудь свойство множества $X \subset R^m$ включает такие характеристики множества X или его подмножеств как размер, угол, длина, площадь или объем, то, скорее всего, оно не является топологическим свойством. Так, свойство быть ограниченным связано с размерами множества X, а свойство быть замкнутым в R^m связано с множеством $R^m - X$, а не только с открытыми в X множествами. На первый взгляд ни одно из этих свойств не кажется топологическим свойством X. Однако здесь существует опасность сделать слишком поспешное заключение. Если бы мы рассмотрели свойство множества X быть одновременио ограниченным и замкнутым в R^m, то на тех же основаниях могли бы считать, что это — не топологическое свойство. Но в § 6 мы доказали, что оно эквивалентно компактности, которая является топологическим свойством. Очевидно, нужен практический признак, позволяющий выяснить, что некоторое свойство *не является* топологическим. Такой признак основан на понятии топологической эквивалентности двух точечных множеств.

Определение. Множества $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$ называются *топологически эквивалентными* (или *гомеоморфными*), если существует такая взаимно однозначная функция $f: X \to Y$, что как сама функция f, так и обратная функция $f^{-1}: Y \to X$ непрерывны. Такая функция f называется *топологическим отображением* (или *гомеоморфизмом*).

Рассмотрим несколько примеров. Мы уже видели, что любые два прямолинейных отрезка подобны и что подобие непрерывно. Так как функция, обратная подобию, также является подобием, отсюда следует, что любые два прямолинейных отрезка топологически эквивалентны (рис. 8.1).

Как показано на рис. 8.2, с помощью радиальной проекции с центром z можно определить топологическое отображение прямолинейного отрезка на дугу окружности. Непрерывность функции f доказывается так: рассмотрим клиновидную область, определяемую окрестностью $N(fx, \varepsilon)$ и точкой z, и выберем положительное число δ столь малым, чтобы окрестность $N(x, \delta)$ лежала в этой области. Так как обратная функция f^{-1} уменьшает расстояния, она тем более непрерывна.

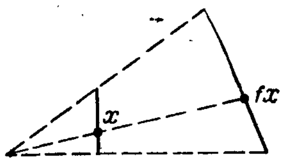


Рис. 8.1.

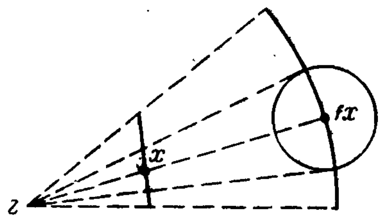


Рис. 8.2.

В действительности, весьма извилистая кривая может оказаться топологически эквивалентной прямолинейному отрезку. На рис. 8.3 изображен график C непрерывной функции f, определенной на замкнутом

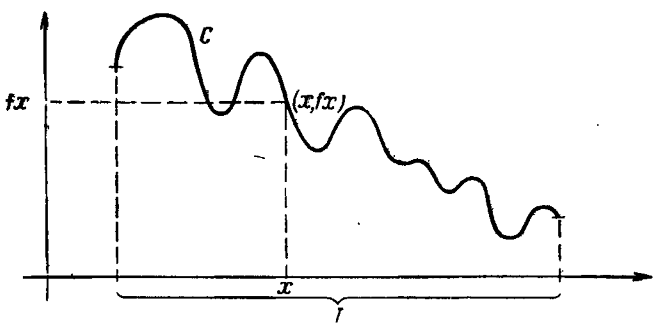


Рис. 8.3.

промежутке I. Пусть g: $C \to I$ — ортогональная проекция, так что $g(x, fx) = x$. Очевидно, функция g взаимно однозначна и $g^{-1}x = (x, fx)$ для всех $x \in I$. Как проекция функция g уменьшает расстояния и потому непрерывна. Непрерывность обратной функции g^{-1} следует из непрерывности f. Таким образом, график C любой непрерывной функции f топологически эквивалентен прямолинейному отрезку I.

Грубо говоря, любая кривая без самопересечений, описываемая при непрерывном движении точки из положения p в положение q (рис. 8.4), топологически эквивалентна прямолинейному отрезку.

Другой пример гомеоморфизма дает стереографическая проекция сферы S с выколотым полюсом p на ее экваториальную плоскость P (рис. 8.5). Решение

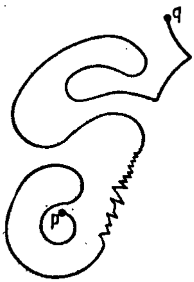


Рис. 8.4.

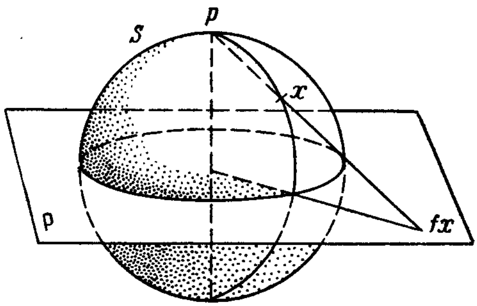


Рис. 8.5.

упражнения 7 из § 3 показывает, что она определяет топологическую эквивалентность между $S-p$ и P. Если мы рассмотрим эту проекцию только на точках одного большого круга C, проходящего через p, то получим топологическое отображение множества $C-p$ на прямую L.

Проиллюстрировав понятие топологической эквивалентности, возвратимся к обсуждению топологических свойств. Следующая теорема устанавливает основное отношение, связывающее эти понятия.

Теорема 8.1. *Если множества $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$ топологически эквивалентны, то они обладают одними и теми же топологическими свойствами.*

Это очевидно, потому что топологическое отображение $f: X \to Y$ устанавливает не только взаимно однозначное соответствие между точками этих двух множеств, но и взаимно однозначное соответствие между их подмножествами (множеству $A \subset X$ соответствует $fA \subset Y$, а множеству $B \subset Y$ — его прообраз

$f^{-1}B\subset X$), прн котором открытые множества переходят в открытые и сохраняются все соотношения и операции теории множеств (например, $A\subset B$ в X в том и только в том случае, если $fA\subset fB$ в Y). Любое истинное высказывание, которое мы можем сделать относительно точек множества X, подмножеств X, открытых в X множеств и их теоретико-множественных соотношений, даст истинное высказывание, если мы все точки и подмножества X заменим их образами в Y.

Поясним это рассуждение на примере свойства быть несвязным. На языке открытых множеств оно формулируется так: X имеет два непустых открытых подмножества A и B, удовлетворяющих условиям $A\cup B=X$ и $A\cap B=\varnothing$. Если мы рассмотрим их образы при f и воспользуемся очевидными соотношениями $fX=Y$, $f\varnothing=\varnothing$, $f(A\cup B)=fA\cup fB$ и $f(A\cap B)=fA\cap fB$, то получим следующее: Y имеет два непустых открытых подмножества fA и fB, удовлетворяющих условиям $fA\cup fB=Y$ и $fA\cap fB=\varnothing$. Следовательно, Y несвязно.

С помощью теоремы 8.1 покажем теперь, что некоторые свойства множества $X\subset R^m$ не являются топологическими. Так как каждый прямолинейный отрезок топологически эквивалентен любому другому прямолинейному отрезку, то его длина не является топологическим свойством. Так как прямолинейный отрезок эквивалентен дуге окружности, не будет топологическим свойством и его прямолинейность. Так как сфера S с выколотой точкой p эквивалентна при стереографической проекции плоскости P, то ограниченность множества $S-p$ не является топологическим свойством. Так как плоскость P в R^3 замкнута, а множество $S-p$ незамкнуто, то свойство плоскости P быть замкнутой в R^3 ие является топологическим.

Ответ на вопрос: «Что такое топология?» теперь должен быть совершенно очевиден:

Топология есть наука о топологических свойствах точечных множеств.

Этот ответ является удовлетворительным, но не полным. В него нужно еще включить топологические свойства функций. Если $f: X \to Y$ — некоторая функция, причем $X \subset R^m$ и $Y \subset R^n$, то свойство функции f называется *топологическим*, если оно эквивалентно некоторому свойству, которое можно сформулировать, пользуясь только понятиями открытых множеств в X и в Y, образов и прообразов и обычными понятиями теории множеств.

Например, непрерывность есть топологическое свойство функции, так как теорема 4.5 утверждает, что функция f непрерывна в том и только в том случае, если прообраз каждого открытого в Y множества открыт в X. Топологические свойства функций легко обнаружить. Вот другой пример: свойство быть постоянной функцией является топологическим. Еще пример: свойство функции $f: X \to Y$, состоящее в том, что прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ компактен, является топологическим.

Полный ответ на поставленный выше вопрос выглядит так:

Топология есть наука о топологических свойствах точечных множеств и функций.

Проанализируем в свете этих определений доказательство главной теоремы, распадающееся на три предложения, сформулированные в начале этого параграфа. Второе предложение является чисто топологическим; оно устанавливает, что некоторое топологическое свойство множества X (компактность) и некоторое топологическое свойство функции f (непрерывность) влекут за собой некоторое топологическое свойство образа fX (компактность). Это же относится не только к компактности, но и к связности. Первое предложение устанавливает два топологических свойства некоторого хорошо известного объекта. Третье предложение обратно первому: эти два топологических свойства, компактность и связность, характеризуют замкнутые промежутки среди всех подмножеств действительной прямой R. Отсюда мы можем заключить, что доказательство главной теоремы почти целиком является топологическим.

Топологию называют резиновой геометрией. Если попытаться окинуть взором все множества, топологически эквивалентные данному точечному множеству X, то интуиция подскажет нам наглядный способ для этого — нужно представить себе, что множество X сделано из резины. Если X можно продеформировать в множество Y, растягивая в одном месте, сжимая в другом, а кое-где и закручивая (но ни в коем случае

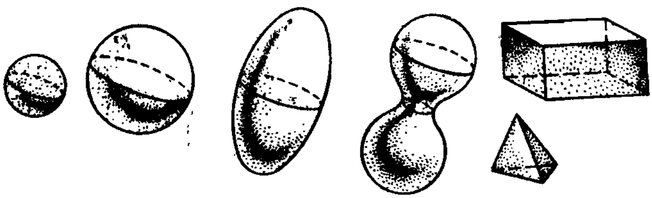


Рис. 8.6.

нигде не разрывая и не склеивая), то X и Y топологически эквивалентны. Например, маленькую сферу (воздушный шарик) можно раздуть в большую, затем ее можно сжать в эллипсоид, а потом, сжав еще больше, превратить эллипсоид в гантель. Ту же надутую сферу можно поджимать в разных местах, пока она точно не обтянет поверхность какого-либо тела, вроде прямоугольного параллелепипеда или тетраэдра (рис. 8.6).

Так как два топологически эквивалентных множества имеют в точности одни и те же топологические свойства, то тополог считает их в сущности одинаковыми (топологически неразличимыми). Это аналогично той точке зрения в евклидовой геометрии, согласно которой две равные фигуры полностью эквивалентны. *Тополог*, по определению, — это такой математик, который не видит разницы между бубликом и кофейной чашкой. На рис. 8.7 показано несколько промежуточных этапов деформации бублика в чашку.

В каждой из классических геометрий существует понятие эквивалентных фигур. Как мы уже заметили, в евклидовой геометрии две фигуры эквивалентны, если они равны, в частности, если существует движение, переводящее одну из них в другую. В проективной геометрии фигуры эквивалентны, если существует *проективное* преобразование, переводящее одну из них в другую. Проективные преобразования включают в себя движения и подобия и, кроме того, достаточно

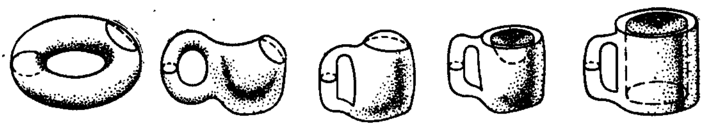


Рис 8.7.

много других преобразований, так что с точки зрения проективной геометрии любые два треугольника эквивалентны, а любая окружность эквивалентна любому эллипсу (см. рис. 8.8).

В дифференциальной геометрии эквивалентность

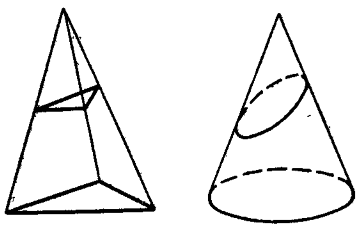


Рис. 8.8.

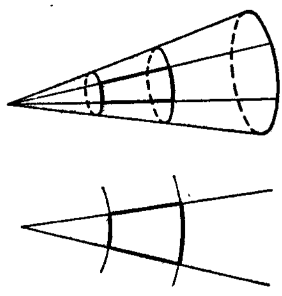


Рис. 8.9.

называется изометрией (у эквивалентных фигур равные метрики). Две фигуры в этом случае эквивалентны, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором длина любой кривой в прообразе равна длине соответствующей кривой в образе. Например, кусок цилиндрической поверхности можно развернуть в кусок плоскости. Точно так же, кусок конуса можно развернуть в сектор кругового кольца (рис. 8.9). Следовательно, эти поверхности изометричны.

Движения, проективные преобразования и изометрии являются топологическими отображениями. В самом деле, в любом из этих случаев соответствие между двумя эквивалентными фигурами является взаимно однозначным и в обе стороны непрерывным. Отсюда следует, что каждое топологическое свойство одной из таких фигур является также свойством и другой и, значит, топологическое свойство является свойством в смысле евклидовой геометрии, проективной геометрии и дифференциальной геометрии. Поэтому любая теорема из топологии автоматически оказывается и теоремой каждой из этих геометрий. Ввиду этого можно с полным правом сказать, что топология — это основная геометрия.

Упражнения

1. Определить гомеоморфизм между X и Y, если
   a) X — открытый промежуток, а Y — прямая.
   b) X — полуоткрытый промежуток, а Y — луч.
   c) X — внутренность круга, а Y — плоскость.
2. Показать, что окружность с одной выколотой точкой топологически эквивалентна открытому промежутку.
3. Множество называется *вполне несвязным*, если единственными его связными подмножествами являются отдельные точки и пустое множество. Привести два примера вполне несвязных подмножеств R, содержащих бесконечно много точек.
4. Множество X называется *локально связным*, если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности $N(x, r)$ существует такое связное открытое в X множество U, что $x \in U \subset N(x, r)$. Выяснить, является ли локально связным каждое из следующих множеств:
   a) множество всех целых чисел.
   b) множество $\left\{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$,
   c) множество $[a, b]$;
   d) множество всех рациональных чисел.
5. Множество X называется *локально компактным*, если у каждой его точки существует окрестность в X, содержащаяся в некотором компактном подмножестве X.
   a) Привести пример не компактного, но локально компактного множества.
   b) Показать, что каждое замкнутое множество в R^m локально компактно.
6. Выяснить, какое из следующих свойств является топологическим, а какое — нет. Для каждого из этих свойств, которое не является топологическим, найти два топологически экви-

валентных множества: одно — обладающее этим свойством, а другое — нет.

a) X — неограничено.
b) X — конечное множество.
c) X — кривая длины 2.
d) X — локально компактно.
e) X — выпуклый многоугольник.
f) X — локально связно.
g) X — вполне несвязно.

7. Проиллюстрируйте доказательство теоремы 8.1, показав, что если компактное множество $X \subset R^m$ топологически эквивалентно множеству $Y \subset R^n$, то Y компактно.
8. Какие из следующих свойств функции $f: X \to Y$ являются топологическими?
   a) Образ каждого множества, открытого в X, открыт в Y.
   b) f есть подобие.
   c) f есть параллельный перенос.
   d) Прообраз каждой точки есть конечное множество.
   e) Прообраз каждой точки компактен.
   f) Прообраз множества Y ограничен.
   g) Прообраз каждой точки связен.

§ 9. Теорема о неподвижной точке

Если некоторое множество отображается функцией f в себя, то может случиться, что какая-либо его точка перейдет в себя. Точка x, обладающая тем свойством, что $fx = x$, называется *неподвижной точкой отображения*. Если круг повернуть вокруг его центра на угол 90°, то единственной неподвижной точкой будет центр круга. То же отображение, рассматриваемое только на окружности, ограничивающей этот круг, не имеет неподвижных точек. Каждое постоянное отображение произвольного пространства в себя имеет одну неподвижную точку. Таким образом, отображение некоторого множества в себя может иметь, а может и не иметь неподвижной точки в зависимости от того, каково это множество и каково отображение. Однако в случае прямолинейного отрезка (замкнутого промежутка) имеет место следующий замечательный результат:

Теорема 9.1. *Каждое непрерывное отображение прямолинейного отрезка в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Введем на прямой, содержащей этот отрезок, координаты, так что отрезок превратится в замкнутый промежуток $[a, b]$. Тогда рассматриваемое отображение будет непрерывной функцией f: $[a, b] \to [a, b]$. Определим новую функцию g: $[a, b] \to R$ условием $gx = fx - x$ для каждого $x \in [a, b]$. Таким образом, функция g равна взятому с определенным знаком расстоянию между точкой x и ее образом fx. Она положительна, если fx лежит правее x, т. е. если $fx > x$, и отрицательна, если fx лежит левее x. Нам нужно найти неподвижную точку отображения f, т. е. точку, в которой функция g равна нулю. Если неподвижен какой-нибудь из концов промежутка, то доказывать нечего. Допустим, что ни один из них не неподвижен. Так как fa и fb принадлежат $[a, b]$, то $a < fa$ и $fb < b$. Поэтому $ga > 0$ и $gb < 0$. Поскольку функция g непрерывна (она является разностью двух непрерывных функций; см. § 3, упражнение 8), то главная теорема утверждает, что g принимает все значения между ga и gb. Следовательно, в некоторой точке $x \in [a, b]$ функция $gx = 0$, и эта точка x является искомой неподвижной точкой отображения f.

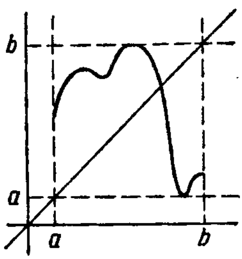


Рис. 9.1.

Теорему 9.1 можно рассмотреть на примере графика функции f, изображенного на рис. 9.1. Неподвижная точка отображения f соответствует точке этого графика, лежащей на биссектрисе координатного угла (т. е. если $fx = x$, то точка $(x, fx) = (x, x)$ лежит на этой биссектрисе). Так как $a < fa$, то точка (a, fa) лежит выше биссектрисы и точно так же точка (b, fb) лежит ниже нее. Так как биссектриса рассекает плоскость на множество точек, лежащих выше нее, и множество точек, лежащих ниже нее, а график является связным множеством, то он должен пересечь биссектрису. Функция g измеряет расстояние по вертикали между графиком и биссектрисой.

Упражнения

1. Найти неподвижную точку отображения промежутка $[0, 1]$ в себя, определяемого формулой $fx=(1-x^2)^{1/2}$.
2. Пусть отображение промежутка $[0, 1]$ в себя задается формулой $fx=4x-4x^2$.
   a) Нарисовать график этой функции и биссектрисы $y=x$.
   b) Является ли это отображение взаимно однозначным на рассматриваемом промежутке?
   c) Найти неподвижные точки этого отображения.
3. Пусть отображение промежутка $[0, 1]$ в себя задается формулой $fx=x^2-x+1$.
   a) Нарисовать график функции и прямую $y=x$.
   b) Является ли это отображение взаимно однозначным на рассматриваемом промежутке?
   c) Найти неподвижные точки этого отображения.
4. Показать, что следующее свойство множества $X\subset R^n$ является топологическим: каждое отображение множества X в себя имеет неподвижную точку.
5. Привести пример отображения промежутка $[0, 1]$ в себя, имеющего ровно две неподвижные точки, а именно 0 и 1.
6. Привести пример отображения открытого промежутка $(0, 1)$ *на* себя, не имеющего неподвижных точек.
7. Показать, что каждое непрерывное отображение полуоткрытого промежутка *на* себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

§ 10. Отображения окружности в прямую

Окружность обладает следующим поразительным свойством:

Теорема 10.1. *Каждое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну и ту же точку образа.*

Доказательство. Пусть $f\colon C\to L$ — непрерывное отображение окружности C в прямую L. Введя на L координаты, мы можем рассматривать f как функцию, значения которой принадлежат R. Рассмотрим на C некоторую пару диаметрально противоположных точек p и p' (рис. 10.1); пусть их образы в L имеют координаты $fp=a$ и $fp'=b$. Исследуем функцию g, определяемую формулой

$$gp=fp-fp'=a-b.$$

Поскольку функция f непрерывна, непрерывной функцией от p является и функция g. Кроме того,

$$gp' = fp' - fp = b - a = -(a - b),$$

так что функция g либо и в p, и в p' равна нулю (в этом случае p и p' имеют при f один и тот же образ), либо принимает в точках p и p' значения противоположного знака. В последнем случае, применяя к одной из полуокружностей от p до p' главную

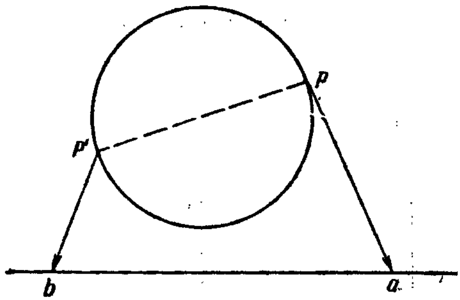


Рис. 10.1.

теорему, мы найдем точку q, для которой $gq = 0 = fq - fq'$. Отсюда следует, что $fq = fq'$, т. е. что один и тот же образ имеют диаметрально противоположные точки q и q'.

Аналогом диаметрально противоположных точек на окружности служат *антиподальные точки* на эллипсе; так называются точки, симметрично расположенные на эллипсе относительно его центра. Так как окружность — частный случай эллипса, то диаметральная противоположность является частным случаем антиподальности. Поэтому естественно спросить, не будет ли аналогичная теорема верна и для антиподальных точек.

Если окружность X и эллипс Y имеют один и тот же центр z и лежат в одной плоскости, то между ними легко установить гомеоморфизм, поставив друг другу в соответствие точки, лежащие на одном и том же луче с вершиной в z. В сущности это не что иное, как радиальная проекция на X, упоминавшаяся в § 3, где было доказано, что она непрерывна. Если X и Y не концентричны, то мы получим гомеоморфизм, сначала радиально спроектировав Y на окружность X', имеющую тот же центр, что и Y (рис. 10.2). Так как

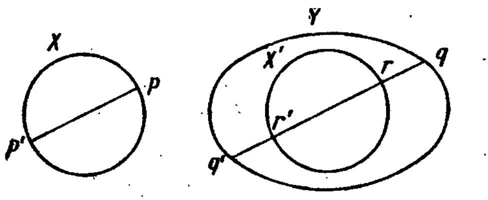


Рис. 10.2.

X и X' подобны, то X топологически эквивалентно X', которое в свою очередь эквивалентно Y. Кроме того, гомеоморфизм $Y \to X$, являющийся композицией радиальной проекции и подобия, сохраняет антиподальность, т. е. если p — образ точки q и q' является антиподом q, то образ p' точки q' является антиподом точки p. Таким образом, теорема о диаметрально противоположных точках остается справедливой и для эллипса, причем антиподальные точки играют ту же роль, что и диаметрально противоположные.

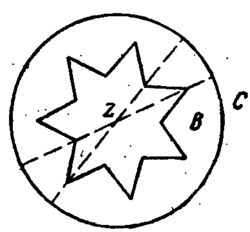


Рис. 10.3.

Аналогичное рассуждение показывает, что этот результат остается в силе и для любой звездообразной замкнутой кривой B вроде многоугольника, изображенного на рис. 10.3. Радиально проектируя B из его центра z на окружность C, получаем гомеоморфизм, переводящий каждую пару точек многоугольника B, лежащих на одной и той же прямой, проходящей через z, в пару диаметрально противоположных точек на C.

Упражнения

1. Пусть f: $C \to L$ — проекция окружности C на прямую L из точки p, лежащей вне C (рис. 10.4).
   a) Описать, какие прообразы имеют различные точки прямой L.
   b) Какая пара диаметрально противоположных точек окружности C имеет один и тот же образ в L?

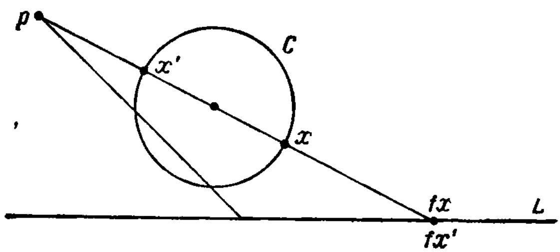


Рис. 10.4.

2. Пусть L — касательная к окружности C в точке p. Спроектируем C на L из точки p', диаметрально противоположной точке p. Описать, какие прообразы имеют точки прямой L. Почему к этому отображению теорема 10.1 неприменима?
3. Показать, что если окружность C подразделяется диаметрально противоположными точками b и b' на две полуокружности D и D', то при любом отображении f: $D \to D'$ некоторая точка отразится относительно диаметра bb'.
4. Показать, что если окружность C подразделяется диаметрально противоположными точками b и b' на две полуокружности D и D', то любое отображение f: $D \to D'$ переводит некоторую точку в ее антипод.
5. Привести пример непостоянного отображения окружности в прямую, при котором всякие две диаметрально противоположные точки имеют один и тот же образ.

§ 11. Задачи о блинах

Первую задачу о блинах грубо можно сформулировать следующим образом. Допустим, что на одной и той же тарелке лежат два блина неправильной формы; показать, что одним взмахом ножа оба эти блина можно разрезать ровно пополам. Если бы, например, каждый из блинов случайно имел форму круга, то нужный разрез давала бы прямая, проходящая через их центры. Однако если рассматривать блины произвольной формы, то задача становится более трудной. Точная математическая теорема выглядит так:

Теорема 11.1. *Если A и B — две ограниченные области в одной и той же плоскости, то в этой плоскости существует прямая, которая делит каждую из этих областей на две равновеликие части.*

Под областью в плоскости понимают связное открытое подмножество этой плоскости. Теорема верна даже в том случае, если один блин лежит на другом, т. е. две области могут перекрываться.

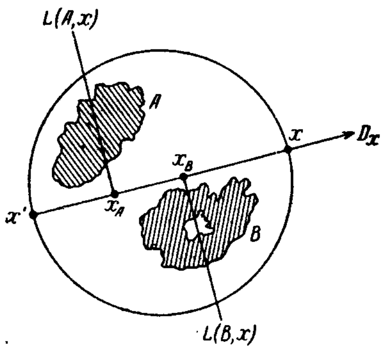


Рис. 11.1.

Так как доказательство несколько длинновато, мы проведем сначала главные его этапы, а два второстепенных предложения докажем позже. Поскольку A и B ограничены, мы можем выбрать окружность C, внутри которой будет лежать объединение $A \cup B$ (рис. 11.1). Пусть z — центр окружности C и r — ее радиус. Для любой точки $x \in C$ пусть x' обозначает диаметрально противоположную ей точку и D_x — диаметр, проходящий через x' и x. Первое наше предложение, которое будет доказано позднее, состоит в следующем:

1. Для любой точки $x \in C$ семейство всех прямых, перпендикулярных диаметру D_x, содержит одну и только одну прямую $L(A, x)$, делящую на две равновеликие части область A, и одну и только одну прямую $L(B, x)$, делящую на две равновеликие части область B.

Обозначим через x_A и x_B точки, в которых D_x пересекает соответственно прямые $L(A, x)$ и $L(B, x)$. На

D_x имеется естественная шкала (или система координат) с началом в z: координатой данной точки служит ее расстояние от z, взятое со знаком плюс, если эта точка лежит по ту же сторону от z, что и точка x, и со знаком минус в противном случае. Пусть $g_A x$ и $g_B x$ — соответственно координаты точек x_A и x_B. Теперь для каждой точки $x \in C$ положим

$$hx = g_A x - g_B x.$$

Вот второе предложение, доказательство которого мы откладываем.

2. Функция h: $C \to R$ непрерывна.

Решающим свойством функции h является то, что ее значения в любых двух диаметрально противоположных точках равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку:

$$hx' = -hx \text{ для любой точки } x \in C.$$

Заметим, чтобы это доказать, что $D_{x'} = D_x$, а потому $L(A, x) = L(A, x')$ и $L(B, x) = L(B, x')$; значит, $x'_A = x_A$ и $x'_B = x_B$. Однако положительное направление на D_x противоположно положительному направлению на $D_{x'}$; отсюда следует, что $g_A x' = -g_A x$ и $g_B x' = -g_B x$, и, значит,

$$hx' = g_A x' - g_B x' = -g_A x + g_B x = -hx.$$

Теперь, по теореме 10.1 существует такая точка $x \in C$, что $hx' = hx$. Для этой точки x одновременно имеем $hx' = hx$ и $hx' = -hx$; поэтому $hx = 0$ и, следовательно, $x_A = x_B$, так что прямая $L(A, x) = L(B, x)$ делит и A и B на равновеликие части.

Доказательство предложения 1. Пусть L_y — прямая, перпендикулярная диаметру D_x и проходящая через точку D_x с координатой y, а fy — площадь той части области A, которая лежит по положительную сторону от L_y (т. е. по ту сторону, которая идет в направлении возрастания значений y). Тогда f есть действительная функция действительной переменной, f: $R \to R$. Когда y меняется от $-r$ до r, прямая L_y

пробегает весь круг, ограниченный C. Будем себе представлять L_y как стальную спицу, закрепленную на рейке D_x под прямым углом к ней. Когда зажим перемещается по рейке от x' до x, спица заметает весь круг. При $y=-r$ зажим находится в точке x', вся область A расположена по положительную сторону от L_{-r}, и, таким образом, $f(-r)$ равно площади A. При $y=r$ зажим находится в x, вся область A лежит на отрицательной стороне и $fr=0$.

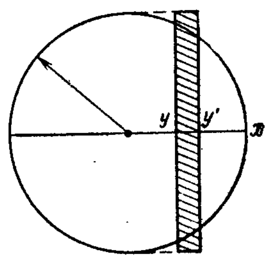


Рис. 11.2.

Чтобы доказать непрерывность функции f, возьмем y, $y' \in R$, причем для определенности будем считать, что $y<y'$. Тогда $fy-fy'$ есть площадь той части области A, которая лежит между прямыми L_y и $L_{y'}$. Так как она содержится в прямоугольной полоске, заштрихованной на рис. 11.2, то отсюда следует, что $|fy-fy'|<2r|y-y'|$. Для произвольного $\varepsilon>0$ возьмем $\delta=\varepsilon/2r$. Если тогда y' принадлежит δ-окрестности точки y, то fy' принадлежит ε-окрестности точки fy. Следовательно, функция f непрерывна в точке y. Так как это верно для любого y, функция f непрерывна.

По главной теореме, когда y изменяется от $-r$ до r, функция f принимает все значения, начиная от площади области A до нуля. Поэтому найдется хотя бы одно значение y, для которого fy в точности равно половине площади A, так что прямая $L_y=L(A, x)$ разрезает A пополам. Нам нужно установить, что существует лишь один такой разрез. Допустим, что, напротив, A делят пополам две прямые L_y и $L_{y'}$ (т. е. что $fy=fy'$) и что $y \neq y'$, скажем $y<y'$. Полоска Q между L_y и $L_{y'}$ есть открытое множество, и ее дополнение разбивается на две части, одна из которых содержит положительную сторону от $L_{y'}$, а другая — отрицательную сторону от L_y. Так как область A связна, а ее точки имеются в каждой из этих частей, A должно содержать и точку множества Q, скажем p. Поскольку

A и Q открыты, то и пересечение $A \cap Q$ открыто и потому содержит некоторую окрестность точки p. Следовательно, это пересечение имеет положительную площадь, и, значит, $fy > fy'$. Так как это противоречит условию, что $fy = fy'$, единственность доказана. Существование и единственность прямой $L(B, x)$ доказываются точно так же. Это завершает доказательство предложения 1.

Доказательство предложения 2. Поскольку h есть разность $g_A - g_B$, достаточно доказать, что непрерывны g_A и g_B (§ 3, упражнение 8). Докажем непрерывность фуикции g_A в точке $c \in C$. Пусть в соответствии с нашими обозначениями c_A — точка пересечения диаметра D_c с перпендикуляром $L(A, c)$, делящим область A пополам (рис. 11.3). Рассмотрим точку

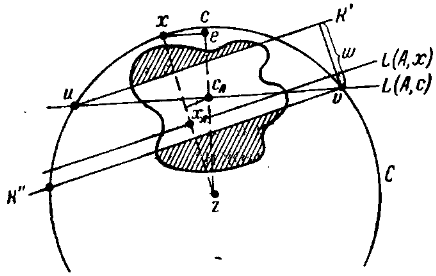


Рис. 11.3.

$x \in C$, близкую к c. Проведем через точки u и v, в которых $L(A, c)$ пересекает C, прямые K' и K'', перпендикулярные D_x. Прямая $L(A, c)$ делит круг, ограниченный C, на две части U и V. Полоса между K' и K'' разбивает свое дополнение в этом круге на две части U' и V', где $U' \subset U$ и $V' \subset V$. Следовательно, U' и V' содержат не более чем по половине площади области A. Отсюда следует, что прямая $L(A, x)$, перпендикулярная D_x и делящая A пополам, лежит в этой полосе и, значит, в этой полосе лежит и точка x_A, в которой $L(A, x)$ пересекает D_x. Так как окружность с центром z, проходящая через c_A, пересекает D_x внутри полосы, то

$$|g_A x - g_A c| < w,$$

где w — ширина полосы.

Чтобы оценить w, заметим, что из подобия треугольников следует равенство

$$\frac{w}{d(u, v)} = \frac{d(e, x)}{d(z, x)},$$

где e — основание перпендикуляра, опущенного из x на D_c. Так как $r = d(z, x)$, получаем

$$w = \frac{d(u, v)}{r} d(e, x).$$

Поскольку $d(u, v) \leqslant 2r$ и $d(e, x) \leqslant d(c, x)$, то

$$w \leqslant 2d(c, x)$$

и, следовательно,

$$|g_A x - g_A c| \leqslant 2d(c, x).$$

Таким образом, если $\varepsilon > 0$ и $x \in N(c, \varepsilon/2)$, то

$$|g_A x - g_A c| < \varepsilon.$$

Это показывает, что функция g_A непрерывна. Подобным же образом, непрерывна и функция g_B. Тем самым предложение 2 и теорема 11.1 доказаны.

Во второй нашей задаче о блинах требуется один блин рассечь двумя перпендикулярными разрезами на четыре равные части.

Теорема 11.2. *Если A — ограниченная область на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят область A на четыре части, имеющие равную площадь.*

Как и прежде, заключим A в окружность C. Для каждой точки $x \in C$ пусть L_x — прямая, перпендикулярная D_x, делящая A пополам, а K_x — делящая A пополам прямая, параллельная D_x. Эти две прямые делят A на четыре части, площади которых, двигаясь против часовой стрелки, мы обозначим через P_x, Q_x, R_x, S_x (рис. 11.4). Так как L_x и K_x делят A пополам, имеем

$$P_x + Q_x = R_x + S_x \text{ и } Q_x + R_x = S_x + P_x.$$

Из этих соотношений находим, что $P_x = R_x$ и $Q_x = S_x$. Если нам повезет и окажется, что и $P_x = Q_x$, то прямые L_x и K_x будут служить решением нашей задачи. Так как, вообще говоря, это равенство не выполняется, мы рассмотрим разность $P_x - Q_x = fx$ и выясним, как меняется эта функция, когда x движется по окружности. Если точка $y \in C$ выбрана так, что диаметр D_y перпендикулярен D_x, то ясно, что $L_y = K_x$ и $K_y = L_x$. Отсюда следует, что $P_y = Q_x$ и $Q_y = R_x$. Поскольку $P_x = R_x$, мы получаем

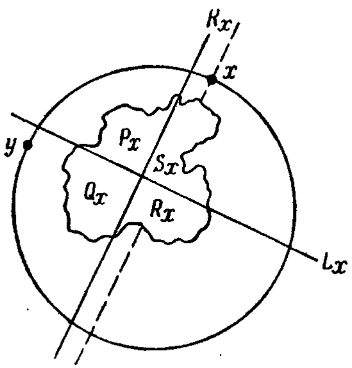


Рис. 11.4.

$$fy = P_y - Q_y = Q_x - P_x = -(P_x - Q_x) = -fx.$$

Следовательно, когда x пробегает по окружности дугу в 90°, функция f меняет знак. Если бы было показано, что функция f непрерывна, то из главной теоремы следовало бы, что в некоторой точке каждой дуги в 90° функция $fx = 0$. Такая точка и давала бы искомое рассечение.

Доказательство непрерывности мы только наметим. Так как f есть разность двух функций, на этот раз достаточно показать, что непрерывна функция P_x (точно такое же рассуждение доказывает и непрерывность функции Q_x). Пусть $c \in C$ — точка, непрерывность функции P_x в которой мы хотим доказать, и $x \in C$ — близкая к ней точка. Переход от пары перпендикуляров L_c, K_c к подобной же паре L_x, K_x можно провести в два шага. Сначала, повернув прямые L_c, K_c вокруг их точки пересечения p, переведем их в пару перпендикуляров L'_c и K'_c, соответственно параллельных L_x и K_x. Угол вращения α равен кратчайшему углу, определяемому дугой, соединяющей c и x. Второй шаг переводит L'_c, K'_c в L_x, K_x путем параллельного переноса. Разность между P'_c и P_c по абсолютной величине не больше, чем площадь нецентрального сектора круга, ограниченного C, с вершиной p и углом α, которая не превосходит $2rd(c, x)$, где r — радиус окружности C. Площадь U полосы, лежащей между L'_c и L_x и внутри C, не больше, чем $2ru$, где u — расстояние между L'_c и L_x. Точно так же площадь V полосы, лежащей между K'_c и K_x и внутри C, не больше, чем $2\,rv$. Разность между P'_c и P_x по абсолютной величине, очевидно, не превосходит

$$U+V \leqslant 2r(u+v).$$

Точка q пересечения L_c и L_x, как легко видеть, лежит внутри C ввиду того, что L_c и L_x делят A пополам и A связно. Отсюда следует, что $d(p, q)<2r$, и потому из подобных треугольников находим, что $u<2d(c, x)$. точно так же и $v<2d(c, x)$. Объединяя все эти оценки, получаем

$$|P_x - P_c| < 10rd(c,\ x).$$

Итак, если задано число $\varepsilon>0$, мы можем взять $\delta=\varepsilon/10r$, и тогда для каждой точки $x \in N(c, \delta) \cap C$ будет выполняться неравенство $|P_x - P_c|<\varepsilon$. Это завершает доказательство.

Упражнения

1. На одной тарелке лежат два блина, один из которых имеет форму квадрата, а другой — круга. Указать разрез, по которому одним взмахом ножа можно разделить каждый из этих блинов пополам.
2. Годится ли метод «линии центров» для любых двух блинов, имеющих форму правильных многоугольников?
3. Сколькими способами можно квадратный блин разделить на четыре равные части двумя перпендикулярными прямыми?
4. При делении любого блина на четыре равновеликие части двумя перпендикулярными прямыми $P_x - Q_x$ обращается в нуль при каждом повороте на 90°. Объяснить, почему из

этого вовсе не следует, что, когда точка x обегает всю окружность, существует не менее четырех таких делений.

5. Привести прямое доказательство (отличное от того, которое было дано в тексте) теоремы 11.1 для случая, когда один блин имеет форму круга, а другой — неправильную форму.
6. Заменим в теореме 11.1 нож, делающий прямолинейные разрезы, лезвием, имеющим форму полуокружности с радиусом, равным диаметру окружности, заключающей две данные области, и по аналогии с предложением 1 рассмотрим те разрезы, для которых центр полуокружности лежит на луче, идущем из z и содержащем x. Почему для разрезов этого типа рассуждение не проходит? Для какого типа кривых лезвий рассуждение сохранило бы силу?

§ 12. Нули многочленов

Следующая наша теорема является применением главной теоремы к алгебре.

Теорема 12.1. *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный нуль.*

Чтобы сделать понятным смысл этой теоремы, рассмотрим несколько конкретных примеров многочленов четной и нечетной степени. Прежде всего, если многочлен имеет степень 1, $fx=ax+b$, причем $a\neq 0$, то графиком функции $y=ax+b$ служит прямая, пересекающая ось x в точке $x=-b/a$, так что многочлен при этом значении x имеет нуль. Затем в качестве примера многочлена степени 2 рассмотрим параболу $y=x^2+1$ (рис. 12.1). Кривая целиком лежит в верхней полуплоскости. Минимальное значение функции x^2+1 равно 1, так как для любого действительного числа x его квадрат $x^2\geqslant 0$; поэтому многочлен действительных нулей не имеет. Точно так же не имеет действительных нулей и многочлен x^6+1; это же относится и к многочлену x^4-2x^2+5, потому что, как видно из соотношения

$$x^4-2x^2+5=(x^2-1)^2+4,$$

его значения не меньше 4 (рис. 12.2). С другой стороны, многочлен x^2-4x+3 четной степени имеет нули $x=1$ и $x=3$ (рис. 12.3).

Графиком многочлена $y=x^3-x+5$ служит кривая, изображенная на рис. 12.4; она пересекает ось x где-то между -2 и -1. Многочлен x^5-2x^3+x+4

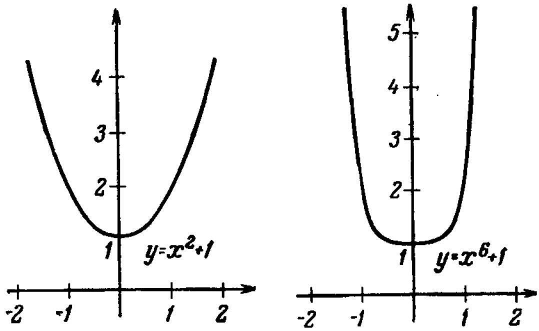


Рис. 12.1.

имеет степень 5; его график, схематически представленный на рис. 12.5, пересекает ось x где-то между $-1{,}7$ и $-1{,}6$.

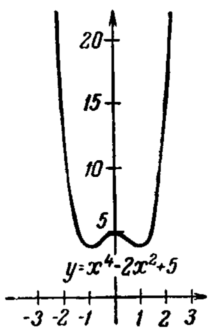


Рис. 12.2.

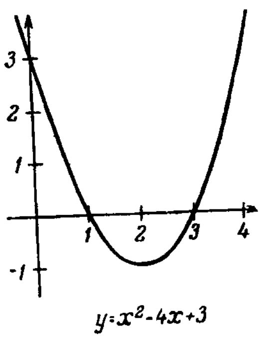


Рис. 12.3.

В каждом из наших примеров график многочлена нечетной степени возрастает от $-\infty$, пересекает ось x и в конце концов уходит к $+\infty$. Любой из многочленов четной степени имеет график, опускающийся от $+\infty$ и после нескольких возможных изгибов возвращающийся к $+\infty$. Наши примеры показывают, что некоторые из этих многочленов ось x не пересекают. Суть теоремы 12.1 состоит в том, что в случае многочленов нечетной степени этого быть не может: каждый многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный нуль.

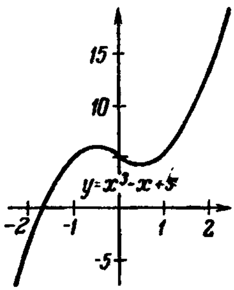


Рис. 12.4.

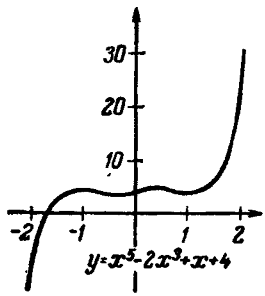


Рис. 12.5.

Для доказательства теоремы 12.1 достаточно рассмотреть многочлены вида

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

потому что если бы коэффициент при старшем члене был не равен 1, то мы могли бы, не изменяя нулей многочлена, разделить его на этот коэффициент. При $x\neq 0$ мы можем записать $f(x)$ в виде

$$x^n\left(1+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)$$

или $f(x)=x^nq(x)$, где

$$q(x)=1+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}.$$

Наш метод доказательства будет состоять в следующем. Мы покажем, что многочлен f нечетной степени при некотором x отрицателен, при некотором другом x положителен и непрерывен. Главная теорема обеспечит нам тогда требуемый результат.

Если x — число, для которого абсолютная величина каждого из членов

$$\frac{a_1}{x},\ \frac{a_2}{x^2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{x^n}$$

меньше, чем $1/n$, то сумма

$$h(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$$

этих n членов по абсолютной величине будет меньше, чем $n/n=1$. Это означает, что $h(x)$ заключена между -1 и $+1$, и так как $q(x)=1+h(x)$, то $q(x)$ положительно. Чтобы найти x, для которого это имеет место, рассмотрим каждое из чисел

$$n|a_1|,\ (n|a_2|)^{1/2},\ \ldots,\ (n|a_n|)^{1/n},$$

и выберем число b, большее любого из них. Убедимся, что для x, у которого $|x|\geqslant b$, $q(x)$ положительно. Заметим, что из неравенств

$$|x|>n|a_1|,\ |x|>(n|a_2|)^{1/2},\ \ldots,\ |x|>(n|a_n|)^{1/n}$$

следует

$$\left|\frac{a_1}{x}\right|<\frac{1}{n},\ \left|\frac{a_2}{x^2}\right|<\frac{1}{n},\ \ldots,\ \left|\frac{a_n}{x^n}\right|<\frac{1}{n}.$$

Для значений x, у которых $|x|\geqslant b$, знак многочлена совпадает со знаком x^n, поскольку $f(x)=x^nq(x)$ и $q(x)$ положительно. Так как n нечетно, x^n имеет тот же знак, что и x. Таким образом, многочлен положителен при $x=b$ и отрицателен при $x=-b$.

Чтобы иметь возможность применить главную теорему и вывести из нее существование нуля между $-b$ и b, необходимо показать, что многочлен является непрерывной функцией. В § 3 мы показали, что любая постоянная функция (в частности, многочлен степени 0) и любая тождественная функция (в частности, многочлен x степени 1) непрерывны. Ниже, в упражнении 2 требуется показать, что произведение непрерывных функций непрерывно. Отсюда следует, что непрерывна функция $x^2=x\cdot x$, затем функция $x^3=x^2\cdot x$ и, по индукции, при каждом k непрерывна функция x^k.

Поскольку непрерывны x^k и постоянная a, то этот же результат говорит нам, что непрерывен и любой одночлен ax^k. Но каждый многочлен есть сумма одночленов, а любая сумма непрерывных функций непрерывна (§ 3, упр. 8 и ответ); следовательно, каждый многочлен непрерывен.

Упражнения

1. Показать, что многочлен x^2 есть непрерывная функция.
2. Показать, что произведение двух непрерывных функций $f\colon [a, b]\to R$ и $g\colon [a, b]\to R$ есть непрерывная функция. *Указание*:

$$|(fx)(gx)-(fx')(gx')| = \\ =|(fx)(gx-gx')+(fx-fx')(gx')| \leqslant \\ \leqslant |fx||gx-gx'|+|fx-fx'||gx'|.$$

3. От чего зависит, будет ли данный многочлен степени n при x, равном нулю, положительным или отрицательным?
4. Пользуясь критерием $|x|>(n|a_k|)^{1/k}$, найти такое число b, что многочлен $f(x)=x^3-2x^2-3x$ при $x>b$ положителен, а при $x<-b$ отрицателен. Разложив этот многочлен на линейные множители, найти наименьшее число a, для которого $f(x)>0$ при $x>a$, и наибольшее число c, для которого $f(x)<0$ при $x<c$.
5. Пользуясь критерием $|x|>(n|a_k|)^{1/k}$, найти такое число b, что многочлен $x^5-3x^4+125x^3+200x^2-x+2$ положителен при $x>b$ и отрицателен при $x<-b$. (Следует обратить внимание на то, что кубический многочлен в упражнении 4 разложить на линейные множители легко, но это совсем не так просто сделать для многочлена пятой степени, рассматриваемого в этой задаче.)

Теоремы существования в двумерном случае

§ 13. Отображения плоскости в себя

Как было сказано в введении, нашей целью в части II является доказательство теоремы существования для системы двух уравнений. Эта теорема формулируется в § 18, а доказательство ее заканчивается в § 26. В §27—36 эта теорема применяется к изучению неподвижных точек отображений, особенностей векторных полей и нулей многочленов. Для того чтобы иметь возможность сформулировать главную теорему, нам нужно развить двумерные аналоги одномерных понятий из части I. Важнейшим из них является понятие порядка замкнутой кривой на плоскости относительно некоторой точки этой плоскости, не лежащей на данной кривой. Сначала мы дадим его интуитивное определение и приведем интуитивное доказательство главной теоремы (§ 17, 18). В § 19—26 определение становится точным, а доказательство строгим.

Напомним, что в главной теореме части I речь идет об отображении f: $[a, b]\to R$ замкнутого промежутка в прямую линию и даются условия, при которых можно утверждать, что точка $y\in R$ принадлежит образу $f[a, b]$ (например, $fa\leqslant y\leqslant fb$). В главной теореме части II мы будем иметь дело с отображением f: $D\to P$ куска D плоскости $P(=R^2)$ в P и установим условия, при которых можно утверждать, что точка $y\in P$ принадлежит образу fD [1]).

---

[1]) В введении было сказано, что в этой теореме речь идет о системе двух уравнений $f(x, y)=a$ и $g(x, y)=b$. Чтобы от такой постановки вопроса перейти к той, о которой мы говорим сейчас, нужно только (x, y) заменить на (x_1, x_2), (a, b) — на (y_1, y_2), (f, g) — на f и пары чисел (x_1, x_2) и (y_1, y_2) интерпретировать как координаты точек x и y на плоскости P.

Напомним также, что для выяснения смысла главной теоремы части I и для того, чтобы ее истинность стала геометрически очевидной, оказалось очень полезным понятие графика функции f: $[a, b] \to R$. И в двумерном случае можно говорить о графике отображения f: $D \to P$. Чтобы понять, что он из себя представляет, заметим, что точка плоскости $P = R^2$ описывается двумя действительными числами (x_1, x_2). Ее образ при отображении f требует еще двух чисел, скажем (y_1, y_2). Поэтому пара, состоящая из точки и ее

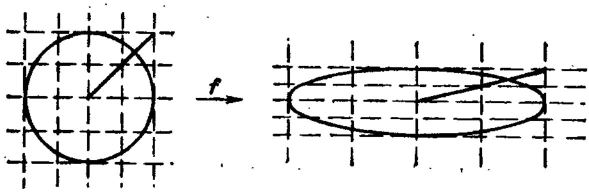


Рис. 13.1.

образа, описывается *четырьмя* числами, и точка графика является точкой четырехмерного пространства. Таким образом, график отображения f есть кривая поверхность в R^4.

В этом состоит первая трудность. Чтобы объяснить наши теоремы на графиках, требуется способность (которой никто из нас не обладает) отчетливо мысленно видеть поверхности в четырехмерном пространстве. Поэтому мы должны освоить другой метод геометрического представления отображений: нужно, как это было кратко описано в § 2 части I, рисовать и образы, и прообразы. В остающейся части этого параграфа мы тем же методом рассмотрим некоторые более сложные отображения. Наша цель — несколько развить геометрическую интуицию и подчеркнуть степень общности последующих теорем.

В § 2 части I в качестве отображений плоскости в себя мы рассмотрели параллельные переносы, вращения, отражения и подобия. Примером более сложного отображения служит отображение, растягивающее длины в одном направлении и сжимающее их в другом. Рис. 13.1 иллюстрирует отображение f, удваивающее длины в горизонтальном направлении и сокращающее их вдвое в вертикальном. Очевидно, оно изменяет углы и форму фигур. Окружность оно переводит в эллипс. Как это ни удивительно, прямые оно переводит в прямые.

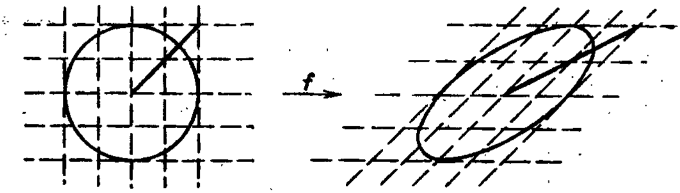


Рис. 13.2.

Рис. 13.2 иллюстрирует отображение сдвига $P \to P$. Представим себе решетку из большого числа горизонтальных и вертикальных планок, причем в месте соединения каждой горизонтальной и вертикальной

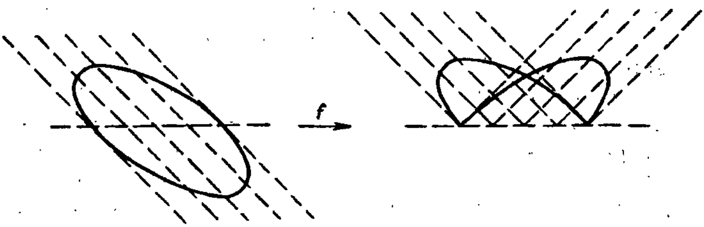


Рис. 13.3.

планки вбито по гвоздику. Это устройство не является жестким и может сдвигаться, угрожая прищемить неосторожные пальцы, — оно и дает представление о сдвиге. Сдвиг, как и предыдущее отображение, переводит окружности в эллипсы и прямые в прямые.

Все отображения, упомянутые до сих пор, были взаимно однозначными. Мы хотим привести примеры и не взаимно однозначных отображений. Рис. 13.3 иллюстрирует простое сгибание плоскости P по прямой. Это отображение на прямой сгиба взаимно однозначно, однако каждая точка, лежащая над этой прямой, имеет своим прообразом две различные точки плоскости.

Рис. 13.4 иллюстрирует двукратное наворачивание плоскости на себя. Центральная точка z отображается в себя. Каждая точка луча L также остается неподвижной. Каждый луч с вершиной в z жестко переходит в другой такой луч, но образующий с лучом L

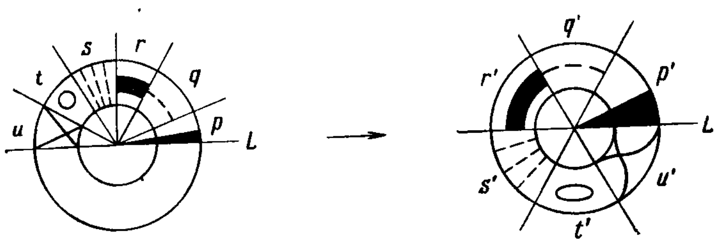


Рис. 13.4.

вдвое больший угол, чем исходный луч. Представим себе луч, вращающийся вокруг точки z с постоянной угловой скоростью; тогда его образ вращается вокруг z с вдвое большей скоростью. Когда первый луч совершает пол-оборота, его образ совершает полный оборот. Каждая точка плоскости, не считая z, имеет прообраз, состоящий из двух точек. Каждая окружность с центром z дважды наворачивается на себя. Аналогичное отображение можно определить и для любого натурального n: в этом случае угловую скорость нужно умножать на n. Каждая точка плоскости, кроме z, имеет своим прообразом при таком отображении ровно n точек.

Еще более сложным является отображение, навивающее плоскость P на себя бесконечное число раз. Оно иллюстрируется рисунком 13.5. Горизонтальная прямая L отображается в точку z, а каждая вертикальная прямая жестко отображается в некоторую прямую, проходящую через z. Когда вертикальная прямая движется с постоянной скоростью в горизонтальном направлении, ее образ с постоянной угловой скоростью вращается вокруг z. На чертеже изображена только половина одного оборота. В каждую точку при таком отображении переходит бесконечное число точек. Прообразом точки z служит целая прямая,

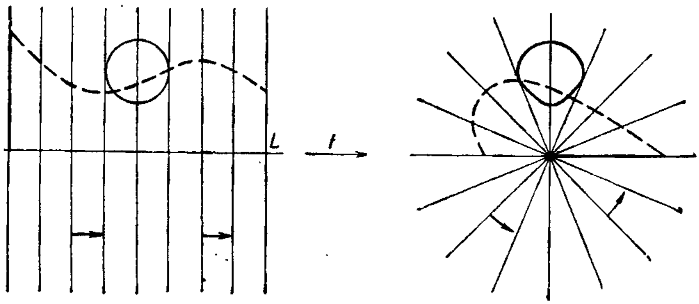


Рис. 13.5.

а прообраз всякой другой точки состоит из двух рядов точек, один из которых расположен выше, а другой — ниже прямой L, причем соседние точки каждого из этих рядов отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии.

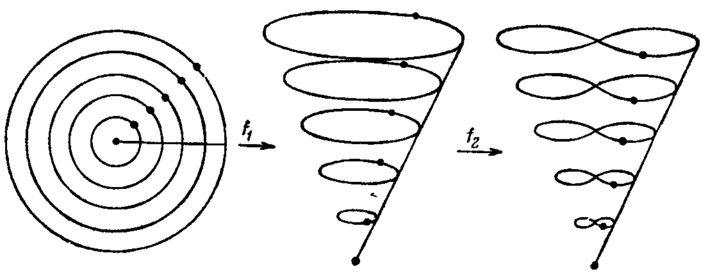


Рис. 13.6.

Отображения, которые можно описать точно и быстро, обычно слишком просты, чтобы дать представление о тех сложностях, которые могут встретиться в общем случае. Рис. 13.6 иллюстрирует одно отображение, которое мы не будем описывать подробно. Оно переводит семейство концентрических окружиостей в семейство восьмерок. Образом плоскости P служит в этом случае в точности часть P, ограиниченная двумя лучами. Интуитивно можно себе представлять, что эти концентрические окружности сначала выстраиваются вдоль некоторого луча, не лежащего в плоскости P, так что плоскость P переходит в коиус, а затем каждая из них закручивается на пол-оборота, превращаясь в восьмерку, причем все эти восьмерки уже лежат в одной плоскости и заполняют угол, ограниченный двумя лучами.

Упражнения

1. Построить отображение f: $P \to P$, сначала иавериув плоскость P на цилиндр Q так, чтобы прямые, параллельные оси x, стали параллельными оси цилиндра Q, а затем ортогонально спроектировав Q на P, считая при этом, что ось цилиндра Q параллельна оси x. Описать образы при f:
   a) плоскости P;
   b) горизонтальной прямой $y = \text{const}$;
   c) вертикальиой прямой $x = \text{const}$;
   d) наклонной прямой;
   e) описать прообраз произвольиой точки.
2. Пусть P — плоскость, проходящая через центр сферы S. Построить отображение f: $P \to P$ как композицию сначала стереографической проекции $P \to S$ из полюса p, а затем ортогоиальной проекции сферы S иазад в плоскость P. Описать: a) образ плоскости P, b) образ произвольной прямой L на плоскости P, c) прообраз произвольной точки, принадлежащей fP.
3. Пусть f — отображение, которое иллюстрирует рис. 13.5. Описать образ
   a) вертикальной прямой.
   b) горизоитальной прямой, находящейся иа расстоянии r от прямой L,
   c) наклонной прямой.
   d) Нарисовать прообраз конфигурации, изображениой на рис. 13.7, показав первые полтора оборота.

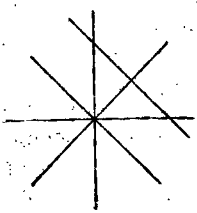


Рис. 13.7.

§ 14. Круг

Важную роль в формулировке и в доказательствах наших одномерных теорем играли промежутки. Аналогичную роль в двумерных теоремах будут играть круги. *Круг* D на плоскости P состоит из окружности C и всех точек плоскости P, лежащих внутри C. Окружность C называется *границей* круга D. Круг D задается своим центром z и радиусом r. Точки круга отстоят от z на расстоянии, меньшем или равном радиусу, т. е. условие $x \in D$ означает, что $d(x, z) \leqslant r$.

Мы видели, что любые два замкнутых промежутка подобны и, следовательно, топологически эквивалентны; это же верно и для любых двух кругов D и D'. Если D и D' имеют разные центры, то сначала круг

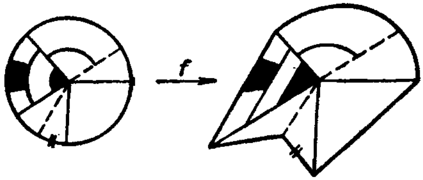


Рис. 14.1.

D' можио с помощью параллельного переноса перевести в круг D'', имеющий тот же центр z, что и D. Затем нужным образом подобраиное растяжение или сжатие относительно z переведет D'' на D.

В одномерном случае любое подмножество прямой, топологически эквивалентное некоторому замкнутому промежутку, и само является замкиутым промежутком, потому что оно должно быть компактиым и связным. На плоскости, однако, существует много совершеино непохожих друг на друга подмножеств, топологически эквивалентных кругу. Например, при отображении сдвига круг может отобразиться на эллипс вместе с его внутренностью. Рис. 14.1 иллюстрирует топологическое отображение круга иа некоторую простую замкнутую кривую вместе с ее внутренностью. Центр z отображается в точку z', а каждый отрезок zy, соедиияющий центр круга D с точкой окружности y, отображается с помощью подобия (растяжения или сжатия) иа параллельный ему отрезок $z'y'$. Этот же прием проходит и для любого выпуклого миогоугольника, иапример треугольиика или прямоугольника.

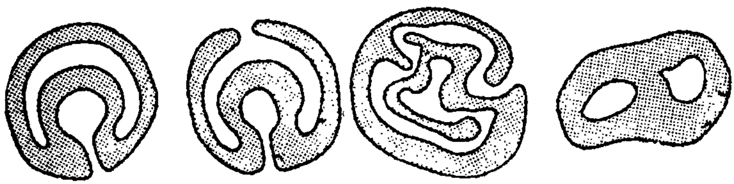
В теоремах части II мы будем считать, что слово «круг» означает любую из этих фигур, топологически эквивалентных кругу. Круг мы предпочитаем остальным фигурам из-за его симметрии и простоты описания.

Круг D, очевидно, ограничен, так как он целиком лежит внутри любого круга с бóльшим радиусом и тем же центром. Он является и замкнутым множеством, потому что каждая точка его дополнения имеет окрестность, не пересекающуюся с D. Действительно, если y не принадлежит D, то расстояние $d(y, z)$ больше радиуса r круга D, и тогда окрестность точки y радиуса $r'=d(y, z)-r$ не содержит точек из D. Так как круг D замкнут и ограничен, он является компактным множеством. Поэтому для любого непрерывного отображения f: $D \to P$ образ fD компактен и, следовательно, замкнут и ограничен.

Для любых двух точек круга D соединяющий их отрезок также лежит в D. Следовательно, D — связное множество. Поэтому образ fD круга D при любом непрерывном отображении f: $D \to P$ связен.

Упражнения

1. Показать, что замкнутый полукруг гомеоморфен кругу. Заключить отсюда, что любое пространство, гомеоморфное кругу, гомеоморфно и этому полукругу.



a в c d

Рис. 14.2.

2. Показать, что если D — круг, а C — ограничивающая его окружность, то любой гомеоморфизм g: $C \to C$ можно продолжить в гомеоморфизм $f: D \to D$.
3. Показать, что если A и B — два подмножества плоскости P, гомеоморфные кругу, и если пересечение $A \cap B$ является дугой

как кривой, ограничивающей A, так и кривой, ограничивающей B, то объединение $A \cup B$ гомеоморфно кругу.

4. Какие из фигур, изображенных на рис. 14.2, гомеоморфны кругу?
5. a) Разрежем последнюю из фигур, изображенных на рис. 14.2, удалив из нее, как показано на рис. 14.3, узкую полосу A. Будет ли оставшееся множество гомеоморфно кругу? b) Какое

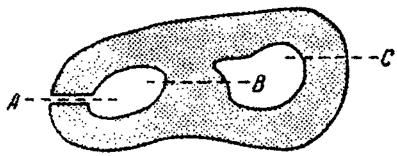


Рис. 14.3.

сочетание разрезов A, B и C приводит к множеству, гомеоморфному кругу? c) Сколько разрезов требуется сделать в фигуре, имеющей три отверстия, чтобы получить множество, гомеоморфное кругу?

§ 15. Первые попытки сформулировать главную теорему

Наша главная теорема в двумерном случае аналогична главной теореме для одномерного случая. Она утверждает, что если $f\colon D \to P$ — непрерывное отображение круга в плоскость, то уравнение $fx = y$ имеет решение $x \in D$ для каждой точки $y \in P$, удовлетворяющей некоторому условию. Сформулировать это условие довольно сложно. Мы подойдем к нему постепенно, убедившись, что некоторые простые, но, казалось бы, напрашивающиеся условия не годятся.

В одномерной теореме, где D есть замкнутый промежуток $[a, b]$, достаточно потребовать, чтобы точка y лежала между fa и fb. Точки a и b являются крайними точками промежутка и отделяют его от остальной части прямой. В случае круга крайними точками D являются точки граничной окружности C, и C отделяет D от остальной части плоскости. Таким образом, условие, которое нам нужно сформулировать, по-видимому, должно как-то связывать расположение точки y с расположением fC. Очевидно, сказать

«y лежит между fC» было бы бессмысленно. Если одномерное условие мы выскажем иначе, требуя, чтобы точка y была *окружена* точками fa и fb, то оно будет выражать ту же самую идею, а его двумерный аналог: «точка y окружена множеством fC», — уже будет иметь какой-то интуитивный смысл. Попытаемся сформулировать это условие точно. Попробуем сначала сказать так: «y является точкой круга, границей которого служит fC». Это условие не годится, потому что для многих непрерывных отображений f

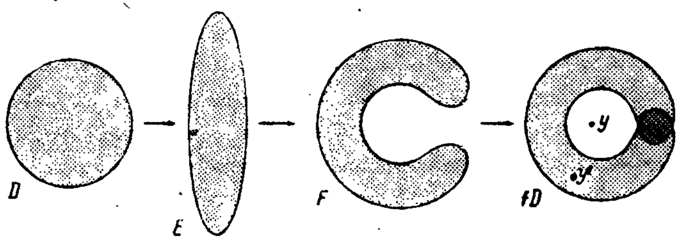


Рис. 15.1.

множество fC не будет окружностью. Оно легко может оказаться эллипсом или квадратом. Сделаем вторую попытку, сказав, что «y есть точка области, границей которой служит fC». Это условие лучше, но здесь не допускается, чтобы fC, например, было восьмеркой. В качестве третьей попытки испытаем такое требование: «y является точкой некоторой ограниченной области, граница которой содержится в fC». Сначала кажется, что это именно то, что нам нужно, но только до тех пор, пока мы не рассмотрим отображение f: $D \to P$ на рис. 15.1. Это отображение лучше всего описать в несколько шагов, двигаясь при этом на рисунке слева направо. Сначала сожмем D в длинную узкую полосу E. Потом изогнем E в кривую фигуру F, похожую на раздутые три четверти окружности. Будем продолжать это изгибание, пока в окончательной фигуре fD два конца не перекроются. Точка y на этом рисунке не принадлежит fD, однако она находится в ограниченной области, граница которой содержится в fC.

На последнем примере хорошо видны трудности, которые мы должны преодолеть. Каково то отношение, которое точку y', принадлежащую fD, связывает с fC, а точку y не связывает с fC? Ответ на этот вопрос будет дан с помощью нового понятия, которое мы введем позже, — *порядка кривой относительно точки.* Мы увидим, что порядок $f|C$ относительно точки y' не равен нулю, а порядок $f|C$ относительно точки y равен нулю. Вот почему уравнение $fx=y'$ имеет решение $x\in D$, а уравнение $fx=y$ решения не имеет.

Упражнение

1. Показать с помощью примера, что следующее условие, наложенное на точку y, не гарантирует того, что она будет принадлежать fD: если z — центр круга D, то y и fz лежат в одном и том же связном подмножестве дополнения $P—fC$.

§ 16. Кривые и замкнутые кривые

До сих пор под словом «кривая» мы понимали график некоторой непрерывной функции f: $[a, b]\to R$. Теперь нам нужно будет пользоваться им в следующем более широком смысле. *Кривая* на плоскости P по определению есть непрерывное отображение φ: $[a, b]\to P$ некоторого замкнутого промежутка в плоскость P. Каждое число $t\in[a, b]$ можно понимать как момент времени, а соответствующую точку $\varphi t\in P$ — как положение движущейся точки в этот момент. Таким образом, кривую можно рассматривать как *траекторию* движущейся точки. В частности, любая кривая имеет некоторую ориентацию в том смысле, что предпочтительное или положительное направление на ней идет от φa к φb. Это — направление движения (или возрастания t). На рисунках ориентация кривых указывается стрелками, как на рис. 16.1. Заметим, что кривой разрешается пересекать себя, т. е. движущаяся точка может проходить через одну и ту же точку плоскости несколько раз в разные моменты времени. Более того, движущаяся точка может в течение некоторого промежутка времени оставаться в покое. Например, постоянная функция, отображающая весь промежуток $[a, b]$ в одну точку, является кривой в нашем смысле. *Замкнутая кривая* есть кривая, начинающаяся и кончающаяся в одной и той же точке, т. е. кривая, у которой $\varphi a = \varphi b$.

Прямолинейный отрезок L, идущий из точки A в точку B, можно представить как некоторую кривую. Напомним, что любые два отрезка подобны. Таким образом, если φ: $[a, b] \to L$ — подобие, причем $\varphi a = A$ и $\varphi b = B$, то φ определяет кривую, образом которой является отрезок L. В этом примере движущаяся точка имеет постоянную скорость.

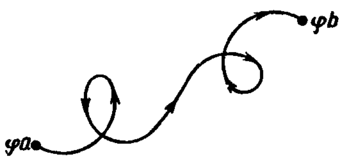


Рис. 16.1.

График непрерывиой функции f: $[a, b] \to R$ есть кривая. Нужно только для каждого значения $t \in [a, b]$ в качестве φt взять точку с координатами (t, ft). Кривая этого вида не имеет самопересечений и не является замкнутой, так как из $t_1 \neq t_2$ следует, что точки φt_1 и φt_2 имеют различные абсциссы.

Любую окружность C можно рассматривать как замкнутую кривую, причем отображение φ определяется следующим стандартным образом. Пусть z — центр окружности C, и L_0 — некоторый фиксированный луч с вершиной в z. При $t \in [0, 1]$ определим φt так: $\varphi 0$ есть точка пересечения луча L_0 и окружности C, а φt есть точка окружиости C, для которой угол между лучом L_0 и отрезком, соединяющим z с φt, равен $360t$ градусов. Например, $\varphi(1/4)$ есть точка окружности, для которой отрезок, соединяющий z с $\varphi(1/4)$, образует с лучом L_0 угол в $90°$, т. е. дуга от $\varphi 0$ до $\varphi(1/4)$ составляет четверть всей окружности (рис. 16.2). Так как в полной

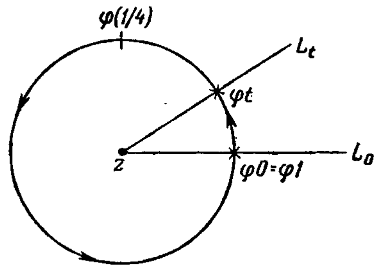


Рис. 16.2.

окружности имеется 360°, то $\varphi 1 = \varphi 0$. И в этом случае движущаяся точка имеет постоянную скорость.

Границу прямоугольника также можно рассматривать как замкнутую кривую. Возьмем замкнутый промежуток $[a, e]$ и разделим его на четыре частичных промежутка числами b, c, d так, чтобы $a<b<c<d<e$. Пусть точки A, B, C, D в этом порядке являются вершинами данного прямоугольника. Как и в рассмотренном выше примере, мы можем определить непрерывную функцию φ, отображающую промежутки $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ и $[d, e]$ соответственно на отрезки AB, BC, CD и DA. Так как $\varphi a = A$ и $\varphi e = A$, то эта кривая замкнута.

Наши геометрические иллюстрации могут вызвать стремление (иногда вводящее в заблуждение) рассматривать кривую φ всего лишь как образ $\varphi[a, b]$. Поэтому нужно подчеркнуть, что *кривая есть отображение* φ. Например, существует бесконечное множество различных стандартных представлений окружности C в качестве замкнутой кривой — по одному для каждого выбора луча L_0.

Упражнения

1. Когда круг радиуса r катится без скольжения по прямой линии, его центр движется по прямой, параллельной данной. Нарисовать траекторию, описываемую
   a) точкой окружности;
   b) точкой, отстоящей от центра на расстоянии $r/2$;
   c) точкой, отстоящей от центра на расстоянии $5r/4$.
2. Показать, что если отображения f: $[a, b] \to P$ и g: $P \to P$ непрерывны, то gf есть кривая.
3. Пусть f: $[0, 1] \to [a, b]$ — подобие, причем $f0 = a$ и $f1 = b$. Вывести формулу для ft при $t \in [0, 1]$. Определить формулой какое-нибудь другое непрерывное отображение, обладающее теми же свойствами, но не являющееся подобием.

§ 17. Интуитивное определение порядка кривой

Пусть φ: $[a, b] \to P$ — замкнутая кривая, y — некоторая точка на плоскости P, не лежащая на этой кривой, и для каждого $t \in [a, b]$ пусть L_t — луч с вершиной в y, проходящий через φt. Когда t меняется от a до b, точка φt движется по кривой, а луч L_t поворачивается вокруг своей неподвижной вершины y. Так как кривая замкнута, луч L_t в конце концов возвратится в свое первоначальное положение $L_b = L_a$. Поэтому за время своего движения луч совершит некоторое целое число полных оборотов вокруг y. Это число называется *порядком* замкнутой кривой φ относительно точки y, и мы будем обозначать его символом $W(\varphi, y)$. По условию обороты против часовой стрелки считаются со знаком плюс, а обороты по часовой стрелке — со знаком минус.

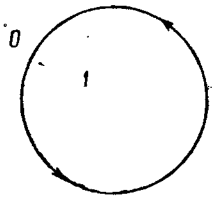


Рис. 17.1.

На рис. 17.1 окружность, рассматриваемая как замкнутая кривая, описанная в § 16, совершает вокруг своего центра один оборот. Один оборот она совершает и вокруг любой другой точки, находящейся внутри окружности. Для любой же точки, лежащей вне окружности, порядок кривой равен нулю. Когда точка φt обегает окружность, луч L_t с вершиной в точке y, лежащей вне окружности, заметает часть плоскости, заключен-

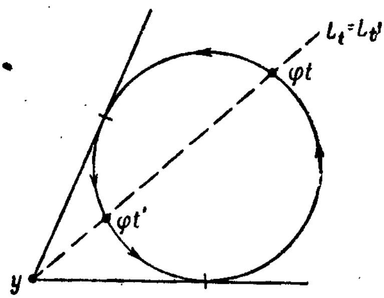


Рис. 17.2.

ную между лучами с вершиной в y, касательными к к окружности. Сначала он движется в одном направлении, а затем, достигнув одной границы (т. е. став одним из касательных лучей), он меняет направление движения и в конечном счете возвращается в первоначальное положение, не совершив ни одного оборота (рис. 17.2).

На рис. 17.3 замкнутая кривая является эллипсом, пробегаемым один раз по часовой стрелке. Для любой точки внутри эллипса порядок кривой равен —1, а для любой внешней точки он равен нулю.

На рис. 17.4 изображена кривая, имеющая форму восьмерки. Точки в одной из ограниченных областей

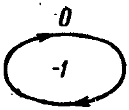


Рис. 17.3.

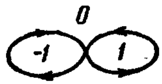


Рис. 17.4.

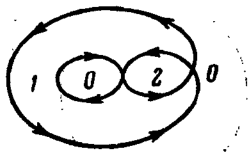


Рис. 17.5.

имеют порядок 1, а в другой — порядок —1. Разумеется, все точки неограниченной области имеют порядок 0.

Рис. 17.5 соответствует примеру, рассмотренному в § 15. В этом примере существует ограниченная область, относительно всех точек которой кривая имеет

Рис. 17.6.

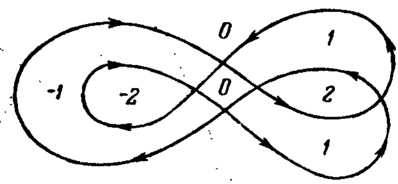


Рис. 17.7.

порядок нуль. Для двух других ограниченных областей порядок равен 1 и 2. Заметим, что для любых двух точек, лежащих в одной и той же связной области, порядок всегда одинаков.

На рис. 17.6 изображена постоянная замкнутая кривая, отображающая весь замкнутый промежуток в одну точку. Порядок ее относительно любой другой точки равен нулю.

На соседнем рис. 17.7 показана замкнутая кривая и отмечен порядок ее относительно точек, лежащих в каждой из ее дополнительных областей. Из этого примера видно, что имеется неограниченное число возможностей.

Пусть теперь C — окружность и $f\colon C \to P$ — непрерывное отображение окружности C в плоскость. Пусть $\varphi\colon [0, 1] \to C$ — стандартное представление C как замкнутой кривой, описанное в § 16. Тогда, поскольку из условия $\varphi 0 = \varphi 1$ следует, что $f\varphi 0 = f\varphi 1$, композиция $f\varphi\colon [0, 1] \to P$ снова будет замкнутой кривой. Мы будем просто называть ее замкнутой кривой f. Эта кривая имеет некоторый порядок относительно любой точки $y \in P$, не лежащей на fC. Он называется порядком замкнутой кривой f относительно y и обозначается символом $W(f, y)$.

Упражнения

1. Пусть точка y на рис. 17.2 находится от центра окружности C радиуса r на расстоянии $r\sqrt{2}$. На какой угол повернется луч L_t, когда точка φt окружности пробежит внешнюю дугу этой окружности от одной касательной до другой? На какой угол повернется луч L_t, когда эта точка, продолжая свое движение, опишет внутреннюю дугу?

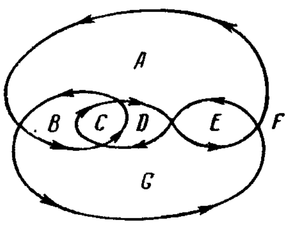


Рис. 17.8.

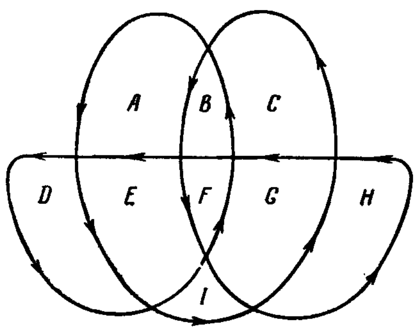


Рис. 17.9.

2. Дополнение в плоскости P замкнутой кривой, изображенной на рис. 17.8, состоит из семи связных областей, помеченных буквами A, B, C, D, E, F и G. Для каждой из них определить порядок данной замкнутой кривой относительно принадлежащих этой области точек.
3. То же, что и в предыдущем упражнении, сделать для замкнутой кривой, изображенной на рис. 17.9.

§ 18. Формулировка главной теоремы

С помощью понятия порядка замкнутой кривой мы можем теперь сформулировать главную теорему части II.

Теорема 18.1. *Пусть* f: $D \to P$ *— непрерывное отображение круга в плоскость,* C *— граничная окружность круга* D *и* y *— точка плоскости, не лежащая на* fC. *Если порядок кривой* $f|C$ *относительно точки* y *не равен нулю, то* $y \in fD$, *т. е. существует такая точка* $x \in D$, *что* $fx=y$.

Сейчас мы изложим короткое интуитивное доказательство. Пусть r — радиус окружности C. Для каждого числа s, удовлетворяющего условию $0 \leqslant s \leqslant r$, пусть C_s — окружность радиуса s, концентричная C; таким образом, $C_r = C$, и C_0 есть центр z. Пусть y' — точка плоскости, не принадлежащая fD. Тогда для каждого $s \in [0, r]$ точка y' не будет принадлежать н fC_s (так как $C_s \subset D$), и, значит, для каждого такого s будет определен порядок $W(f|C_s, y')$. Будем его кратко обозначать символом $W(s)$. Рассмотрим теперь семейство замкнутых крнвых $f|C_s$ при s, убывающем от r до нуля. Его члены начинаются с $f|C$ и в конце концов стягиваются в постоянную кривую $f|C_0$, т. е. в точку fz. Так как $f|C_s$ меняются постепенно, когда s монотонно убывает, порядок $W(s)$ является непрерывной фуикцией от $s \in [0, r]$. Как же меняется $W(s)$? Ответ таков: вообще не меняется, потому что W есть непрерывная функция от s, а каждое ее значение $W(s)$ должно быть целым числом. Но непрерывная функция не может перепрыгнуть от одного целого значения к другому, не приняв все промежуточные нецелочисленные значения (см. главную теорему части I). Таким образом, при всех $s \in [0, r]$ порядок $W(s)$ принимает одно и то же значение; в частности, $W(r) = W(0)$. Но $W(0) = 0$, так как $f|C_0 = fz$ — постоянная замкнутая кривая. Следовательно, кривая $f|C_r$ имеет порядок нуль относительно каждой точки y', не принадлежащей fD. Поэтому из условия $W(f|C_r, y) \neq 0$ вытекает, что y принадлежит fD, а сказать, что y принадлежит fD, значит сказать, что существует такое $x \in D$, для которого $fx = y$.

Иллюстрацией этих рассуждений служит рис. 18.1, на котором можно проследить за изменением замкнутых кривых $f|C_s$ при убывании s. Как только две пере-

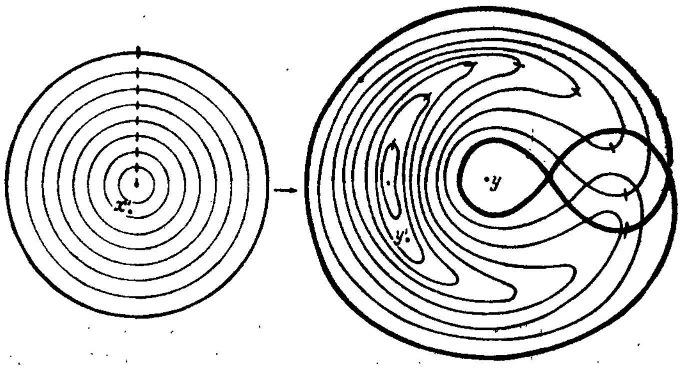


Рис. 18.1.

крывающиеся части разъединятся (например, на третьей из нарисованных кривых), точка y, очевидно, окажется вне замкнутой кривой, и, следовательно, порядок этой кривой относительно y равен нулю. Заметим, что это согласуется с результатом, полученным для кривой, изображенной на рис. 17.5.

Упражнения

1. Если замкнутая кривая из упражнения 2 к § 17 является кривой $f|C$ для некоторого непрерывного отображения $f: D \to P$, то какие из дополнительных областей A, B, ..., должны лежать в fD?
2. Ответить на аналогичный вопрос, относящийся к замкнутой кривой из упражнения 3 к § 17.
3. Пусть $f: P \to P$ — отображение плоскости в себя, являющееся простым сгибанием по диаметру некоторого круга.
   a) Каков образ граничной окружности C? Всего круга?
   b) Какой порядок $W(f|C, y)$ имеет кривая $f|C$ относительно точек y, принадлежащих образу круга?

19. Когда рассуждение не является доказательством?

Большинство из тех, кто разберет и поймет рассуждения двух предыдущих параграфов, будет убежден, что теорема верна и что нужно лишь очень немногое прибавить, чтобы получить полное и логически строгое доказательство. Однако вдумчивый читатель должен заметить пробелы в наших доводах. Главный пробел содержится в § 17: точного определения порядка кривой мы не дали. Решить, сколько полных оборотов сделает луч L_t вокруг своей вершины y, когда t изменится от a до b, мы предоставили интуиции: мы считали, что наши глаза могут следить за вращающимся лучом и расчленять его движение на целое число оборотов. Как хорошо известно, наше зрение вовсе не так уж надежно в этом отношении; например, если неподвижные кадры следуют один за другим достаточно быстро, нам кажется, что мы видим непрерывное движение.

К счастью, математические понятия и выводы не зависят от нашей способности наблюдать движение. Ситуация, которую мы должны изучить, носит статический характер. Мы имеем замкнутую кривую φ и точку y, не лежащую на этой кривой, и хотим поставить y и φ в соответствие некоторое целое число, называемое порядком кривой φ относительно точки y, которое согласовывалось бы с нашим интуитивным представлением. Это будет сделано в следующих семи параграфах. Читатель, предпочитающий новые идеи и приложения тщательному развитию уже намеченной идеи, может перейти сразу к § 27.

Прежде чем углубиться в детали определения $W(\varphi, y)$, заметим, что для того, чтобы довести до конца определение и доказательство главной теоремы, нам нужно только

1) точно определить порядок $W(\varphi, y)$,

2) показать, что он непрерывно зависит от замкнутой кривой φ, когда она изменяется так, как это описано в интуитивном доказательстве, приведенном в § 18, и

3) показать, что $W(\varphi, y)=0$, если φ — постоянная замкнутая кривая.

Если по определению считать, что порядок $W(\varphi, y)$ равен нулю для всех φ и y, то требования (1), (2) и (3) окажутся выполненными и, таким образом, для этого W будет справедливо и доказательство главной теоремы. Но заключение этой теоремы ничего нам не дает, так как точек y, для которых $W(f|C, y)\neq 0$, не будет. Поэтому, чтобы наши усилия не оказались бесполезными, потребуем также, чтобы выполнялось следующее условие:

4) порядок $W(\varphi, y)$ должен быть отличен от нуля для некоторых кривых φ и точек y; в частности, он должен быть определен так, чтобы его значения в примерах, рассмотренных в § 17, совпадали с значениями, определенными нами интуитивно.

§ 20. Угол, заметаемый кривой

Чтобы дать хорошее определение порядка замкнутой кривой, рассмотрим сначала более общее понятие «угла, заметаемого кривой φ: $[a, b]\to P$ относительно точки y». Величину $A(\varphi, y)$ этого угла мы определим в два шага: сначала для кривых, принадлежащих одному специальному классу, а потом и для любых кривых. (Все углы, если не будет сказано противное, мы будем измерять в градусах, а знак градуса ° будем опускать.) После этого мы увидим, что величина угла, заметаемого произвольной замкнутой кривой φ, является кратным числа 360, и отношение этой величины к 360 и будет по определению равно порядку $W(\varphi, y)$:

$$W(\varphi, y)=\frac{A(\varphi, y)}{360}.$$

Специальный класс кривых, для которого угол $A(\varphi, y)$ можно определить легко и четко, состоит из так называемых неполных кривых относительно точки y, не принадлежащей данной кривой; кривая φ называется *неполной относительно* y, если существует луч L с вершиной в y, не пересекающий этой кривой.

Например, постоянная кривая $\varphi t = z \neq y$ для всех $t \in [a, b]$ является неполной относительно y. На рис. 20.1 изображен менее тривиальный пример неполной кривой. Когда t меняется от a до b, точка φt движется по кривой от φa до φb, а луч, соединяющий y с точкой кривой φt, поворачивается от L_a до L_b. Пусть

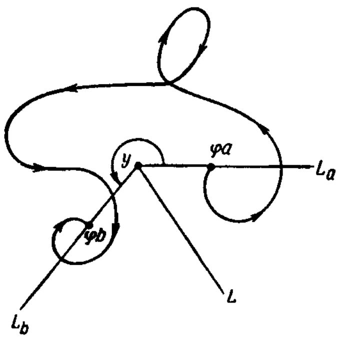


Рис. 20.1.

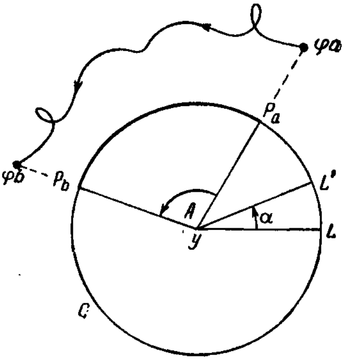


Рис. 20.2.

$\measuredangle L_aL_b$ — это угол поворота; так как кривая φ является неполной, этот угол не содержит луч L (с вершиной y и не пересекающий φ). По определению $A(\varphi; y)$ есть величина в градусах угла $\measuredangle L_aL_b$; углы против часовой стрелки считаются со знаком плюс, а углы по часовой стрелке — со знаком минус.

Допустим, что у нас есть транспортир в форме целой окружности C, поделенной на 360 равных дуг, и точки деления пронумерованы против часовой стрелки числами от 0 до 359. Поместим транспортир так, чтобы его центр совпал с y, а нулевой луч пошел по лучу L (т. е. чтобы нулевая точка на C оказалась в точке пересечения C с L). Пусть p_a и p_b — точки пересечения окружности C соответственно с лучами L_a, L_b, а x_a, x_b — соответствующие деления на транспортире. Тогда угол $\measuredangle L_aL_b$ может быть вычислен по формуле

$$A(\varphi, y) = x_b - x_a.$$

Заметим, что разиость $x_b - x_a$ не зависит от положения начальиого луча транспортира, если только этот луч не содержится в измеряемом угле A (рис. 20.2). Действительно, если повернуть транспортир на угол α так, чтобы его начальным лучом был луч L', то иовые делеиия на транспортире будут равны

$$x'_a = x_a - \alpha \text{ и } x'_b = x_b - \alpha,$$

так что если лучи L и L' не пересекают дугу $p_a p_b$ окружиости C, являющуюся радиальной проекцией данной кривой, то

$$x'_b - x'_a = x_b - x_a = A(\varphi, y).$$

Легко видеть, что при этих условиях деления транспортира всегда содержатся между 0 и 360, а разность $x_b - x_a$ между —360 и 360. На рис. 20.1 она положительна и равна примерно 230. (Если ориентацию кривой изменить на обратную, т. е. если поменять местами φa и φb, то $A(\varphi, y)$ будет равно примерно —230.)

Формула

$$A(\varphi, y) = x_b - x_a,$$

таким образом, однозначно определяет величину угла, заметаемого неполной кривой φ относительио точки y. Кроме того, определение «иеполной» кривой гарантирует существование луча L с вершиной в y, не пересекающего кривую φ, к которому мы можем приложить нулевое деление нашего транспортира для вычисления $A(\varphi, y)$; если таких лучей много, то не имеет значения, какой из них мы выберем в качестве начального луча нашего траиспортира.

Заметим, что наше определение обеспечивает взаимное погашение положительных и отрицательных движений. Например, на рис. 20.1 луч L_t вначале поворачивается на угол —30° и немедленно его гасит, возвращаясь в первоначальное положение. Точно так же, когда точка φt обегает по кривой петлю, соответствующий поворот луча L_t сводится к нулю.

В случае когда φ — постоянная кривая, отображающая промежуток $[a, b]$ в одну точку, φ является неполной кривой и $A(\varphi, y)=0$, так как $L_a=L_b$ и, значит, $x_a=x_b$.

Функция $A(\varphi, y)$ обладает одним наиболее важным свойством, называемым ее *аддитивностью* относительно φ. Пусть $a<b<c$ — действительные числа, и пусть φ: $[a, c]\to P$ есть неполная кривая относительно y. Пусть φ_1 и φ_2 — две части кривой φ, получаемые при сужении отображения φ соответственно на промежутках $[a, b]$ и $[b, c]$. Мы можем рассматривать φ как объединение φ_1 и φ_2. Очевидно, кривые φ_1 и φ_2 также являются неполными относительно точки y. Выберем луч L с вершиной в y, не пересекающий φ. Тогда для лучей L_a, L_b и L_c мы получим на транспортире соответственно деления x_a, x_b и x_c. Так как

$$x_c-x_a=(x_b-x_a)+(x_c-x_b),$$

то мы видим, что

$$A(\varphi, y)=A(\varphi_1, y)+A(\varphi_2, y).$$

Упражнения

1. Относительно каких из точек u, v, w, x, y и z на рис. 20.3 кривая является неполной?

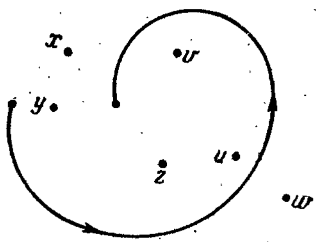


Рис. 20.3.

2. Чему равен соответствующий угол в градусах для каждой из точек, для которой кривая является неполной?

§ 21. Подразделение кривой на неполные кривые

Если φ: $[a, b]\to P$ — некоторая кривая, то мы можем разбить ее на части, разделив промежуток $[a, b]$ на частичные замкнутые промежутки и по очереди сужая отображение φ на каждом из них. Таким путем кривую φ можно разложить в объединение нескольких меньших кривых. Если кривая φ не является неполной относительно y, может случиться, что каждая из этих частей уже окажется неполиой относительно y. Тогда сложив величины углов с вершинами в y, определяемых этими частями, мы сумеем получить и значение для $A(\varphi, y)$.

Дадим точные определения. Разложение кривой φ: $[a, b] \to P$ в объединение кривых называется *подразделением* $\mathscr{P}$ кривой φ. Оно состоит, во-первых, из возрастающей последовательности чисел, начинающейся с a и кончающейся в b:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b,$$

и, во-вторых, из последовательности кривых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, где φ_i — сужение φ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Подразделение называется *достаточно мелким* для точки y, не лежащей на φ, если каждая из кривых φ_i является неполной относительно y. В этом случае определено каждое из чисел $A(\varphi_i, y)$, и их сумма обозначается символом

$$A(\mathscr{P}, y) = \sum_{i=1}^{m} A(\varphi_i, y) = \\ = A(\varphi_1, y) + A(\varphi_2, y) + \ldots + A(\varphi_m, y). \quad (21.1)$$

Мы докажем два предложения:

1. Если φ — любая кривая и y — не лежащая на ней точка, то существует подразделение кривой φ, достаточно мелкое для y.

2. Если $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ — два подразделения кривой φ, достаточно мелкие для y, то $A(\mathscr{P}, y) = A(\mathscr{P}', y)$.

Как только эти утверждения будут доказаны, мы можем определить $A(\varphi, y)$ для любой кривой φ следующим образом:

Определеиие. Если φ — кривая на плоскости и y — не лежащая на ией точка этой плоскости, то общее значение $A(\mathscr{P}, y)$ для всех достаточно мелких подразделений $\mathscr{P}$ кривой φ называется *углом, заметаемым кривой φ относительно точки y.* Он обозначается символом $A(\varphi, y)$ и может быть вычислен по формуле (21.1), причем каждый член суммы в правой части этой формулы можно найти методом § 20.

Первое предложение говорит нам, что мы можем найти подразделение, для которого определено число $A(\mathscr{P}, y)$. Второе же утверждает, что полученное таким образом число $A(\mathscr{P}, y)$ не зависит от выбора подразделения и, значит, зависит только от φ и от y.

Доказательство предложения 1. Для любой точки $p=\varphi t$ кривой φ окружность с центром p и радиусом $d(p, y)$ проходит через y (рис. 21.1). Любая часть кривой, лежащая внутри этой окружности, является неполной относительно y, потому что она не пересекает луч с вершиной y, являющийся продолжением отрезка py, идущим вне окружности. Для каждого $t \in [a, b]$ возьмем $\varepsilon_t = d(p, y)$. Тогда в силу непрерывности отображения φ найдется такое число $\delta_t > 0$, что для всякого $t' \in N(t, \delta_t)$ точка кривой $\varphi_{t'}$ будет принадлежать $N(p, \varepsilon_t)$. Отсюда теперь следует, что для каждого замкнутого промежутка $I' \subset N(t, \delta_t)$ кривая $\varphi | I'$ является неполной относительно y.

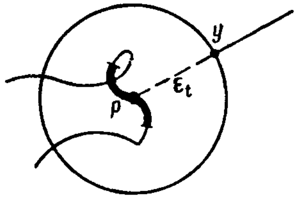


Рис. 21.1.

Так как промежуток $[a, b]$ компактен, а окрестности $\{N(t, \delta_t)\}$ покрывают $[a, b]$, существует конечное число этих окрестностей, скажем $N_1, N_2, \ldots, N_k$, покрывающих $[a, b]$. Пусть S — множество всех концов открытых промежутков $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Обозначим через δ половину наименьшего из всех расстояний $d(s, t)$ для $s, t \in S$ и $s \neq t$. Пусть $\mathscr{P}$ — любое подразделение промежутка $[a, b]$ на замкнутые промежутки длины, не превосходящей δ. Мы утверждаем, что $\mathscr{P}$ достаточно мелко для y. Чтобы это доказать, достаточно убедиться, что каждый частичный промежуток I' подразделения $\mathscr{P}$ содержится в одной из окрестностей

$N_1, N_2, \ldots, N_k$. Так как длина промежутка I' не превосходит δ, то I' либо совсем не содержит точек из S, либо содержит одну лишь такую точку, скажем c. В первом случае мы выберем любую окрестность N_i, пересекающую I' (I' покрывается окрестностями $N_1, N_2, \ldots, N_k$). Тогда $I' \subset N_i$, потому что промежуток I' не содержит ни одного из концов открытого промежутка N_i. Во втором случае выберем любую окрестность N_i, содержащую точку c. Тогда снова $I' \subset N_i$, так как I' не содержит ни одного из концов N_i. Это завершает доказательство предложения 1.

Доказательство предложения 2. Если $\mathscr{P}$ — достаточно мелкое подразделение кривой φ и $\mathscr{P}'$ — подразделение, получающееся из $\mathscr{P}$ добавлением одной новой точки, лежащей в каком-либо из частичных промежутков, скажем I_k, и разбивающей его на два замкнутых промежутка I' и I'', то из доказанной в § 20 аддитивности следует, что

$$A(\varphi \mid I', y) + A(\varphi \mid I'', y) = A(\varphi \mid I_k, y).$$

Прибавляя к обеим частям равенства члены $A(\varphi \mid I_j, y)$ для всех $j \neq k$, получаем, что $A(\mathscr{P}, y) = A(\mathscr{P}', y)$.

Точки $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, определяющие подразделение $\mathscr{P}$, назовем *вершинами* $\mathscr{P}$. Если $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ — два подразделения кривой φ и все вершины $\mathscr{P}$ входят в число вершин $\mathscr{P}'$, то $\mathscr{P}'$ называется *измельчением* подразделения $\mathscr{P}$, и это мы будем записывать так: $\mathscr{P}' < \mathscr{P}$. Каждый частичный промежуток из $\mathscr{P}'$ должен тогда содержаться в некотором частичном промежутке из $\mathscr{P}$. Поэтому если достаточно мелко $\mathscr{P}$, то достаточно мелкими будут и все его измельчения.

Если $\mathscr{P}' < \mathscr{P}$, то мы можем взять все вершины $\mathscr{P}'$, не являющиеся вершинами $\mathscr{P}$, и добавлять их по одной. Тогда мы получим последовательность измельчений $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 > \mathscr{P}_2 > \ldots > \mathscr{P}_s = \mathscr{P}'$. Предположим, кроме того, что $\mathscr{P}$ достаточно мелко. Тогда из результата, полученного в первом абзаце этого доказательства, следует, что

$$A(\mathscr{P}, y) = A(\mathscr{P}_1, y) = A(\mathscr{P}_2, y) = \ldots$$
$$\ldots = A(\mathscr{P}_s, y) = A(\mathscr{P}', y).$$

Поэтому из условия $\mathscr{P}' < \mathscr{P}$ и из того, что $\mathscr{P}$ достаточно мелко, вытекает, что $A(\mathscr{P}, y) = A(\mathscr{P}', y)$.

Пусть теперь $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — два достаточно мелких подразделения. Объединение вершин $\mathscr{P}_1$ и вершин $\mathscr{P}_2$ составляет множество вершин некоторого нового подразделения, которое мы обозначим через $\mathscr{P}_3$. Очевидно, $\mathscr{P}_3 < \mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_3 < \mathscr{P}_2$. Тогда из доказанного выше следует, что $A(\mathscr{P}_1, y) = A(\mathscr{P}_3, y)$ и $A(\mathscr{P}_2, y) = A(\mathscr{P}_3, y)$. Таким образом, $A(\mathscr{P}_1, y) = A(\mathscr{P}_2, y)$ и доказательство закончено.

Упражнения

1. Взяв по точке y в каждой из областей A, B, D и F на рис. 17.8, найти подразделение, достаточно мелкое для y.
2. Пусть кривая на рис. 21.2 подразделена точками a, b, c, d, e и f, как это показано на рисунке. Стрелки указывают направление обхода кривой.
   a) Какова наибольшая часть кривой, начинающаяся в a и кончающаяся в одной из данных точек, неполная относительно y?
   b) Существует ли такая часть рассматриваемой кривой, которую можно присоединить к части от a до d так, чтобы получившаяся кривая осталась неполной относительно y?
   c) Найти наименьшее число точек a, b, ..., определяющих подразделение, достаточно мелкое для y.

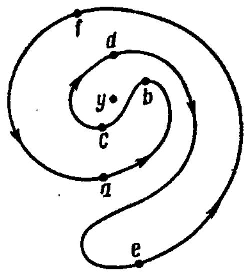


Рис. 21.2.

§ 22. Порядок $W(\varphi, y)$ кривой относительно точки

Как только какое-либо достаточно мелкое подразделение $\mathscr{P} = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ кривой φ для точки y найдено, определение числа $A(\varphi, y)$ становится чисто техническим делом. Нужно просто с помощью транспортира измерить все $A(\varphi_i, y)$ и затем сложить их, учитывая знаки. При измерении $A(\varphi_i, y)$ нулевое деление шкалы нужно накладывать на луч L_i, не пересекающий φ_i, и подсчитывать разность между двумя делениями в концах кривой φ_i. Таким образом, для каждой неполной кривой нужно менять положение транспортира. Теперь мы покажем, как можно обойтись лишь одним положением транспортира и сильно сократить вычисления.

Пусть, как и прежде, C — окружность с центром y и радиусом 1. Для каждого $i=0, 1, \ldots, m$ обозначим через p_i точку пересечения окружности C с лучом с вершиной в y, проходящим через точку φt_i кривой φ. Для каждой неполной кривой φ_i пусть L_i — луч с вершиной в y, не пересекающий φ_i. Две точки на окружности p_{i-1} и p_i определяют две дуги; пусть $p_{i-1}p_i$ — та из этих дуг, которая не пересекает L_i. Тогда, как было показано в § 20, $A(\varphi_i, y)$ есть угловая мера этой дуги с должным учетом знака. Будем считать, что эта дуга ориентирована от p_{i-1} к p_i. Если при этой ориентации она идет против часовой стрелки, то $A(\varphi_i, y)$ имеет знак плюс, в противном же случае — знак минус.

Предположим для удобства, что наш транспортир имеет радиус 1. Поместим его центр в точку y и повернем так, чтобы нулевое деление попало в точку q окружности C, отличную от $p_0, p_1, \ldots, p_m$. После этого оставим его неподвижным и обозначим через $x_0, x_1, \ldots, x_m$ деления в градусах, соответствующие точкам $p_0, p_1, \ldots, p_m$. Каждое из чисел x_i находится между 0 и 360. Теперь мы можем установить нашу упрощенную формулу для $A(\varphi, y)$.

Теорема 22.1. *Пусть r — число дуг $p_{i-1}p_i$, содержащих точку q и имеющих положительную ориентацию, и s — число дуг $p_{i-1}p_i$, содержащих q и имеющих отрицательную ориентацию. Тогда*

$$A(\varphi, y) = x_m - x_0 + (r - s)360.$$

Рис. 22.1 служит иллюстрацией этой теоремы. Если мы проведем луч yq, то увидим, что он пересекает кривую φ в трех точках. Можно определить ориентацию кривой φ, а значит, и дуги $p_{i-1}p_i$ для каждой из точек пересечения. Для первых двух она отрицательна, а для третьей положительна; таким образом, $r=1$ и $s=2$. Если нулевое деление транспортира поместить в точку q, то для x_m мы получим число 65, а для x_0 —

число 195. Поэтому $A(\varphi, y) = 65 - 195 + (1-2)360 = -490$.

Из теоремы следует, что число

$$x_m - x_0 + (r - s)360$$

не зависит от выбора нулевой точки q, несмотря на то, что x_m, x_0, r и s от этого выбора зависят.

Чтобы доказать теорему, вспомним, что

$$A(\varphi, y) = \sum_{i=1}^{m} A(\varphi_i, y).$$

Каждое из чисел $A(\varphi_i, y)$, являющихся угловой мерой дуг $p_{i-1}p_i$, мы хотим выразить через x_{i-1}, x_i.

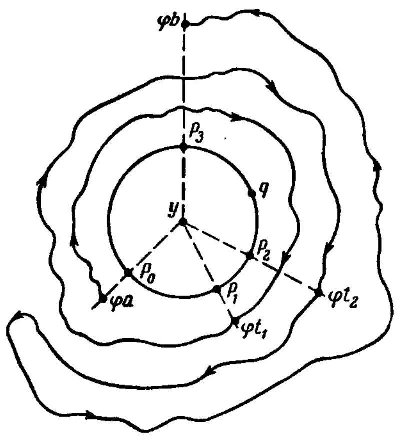


Рис. 22.1.

Рассмотрим сначала такое i, для которого дуга $p_{i-1}p_i$ не содержит q, как на рис. 22.2. По нашему определению величины угла, заметаемого неполной дугой, $A(\varphi, y) = x_i - x_{i-1}$. Заметим, что это имеет место и в том случае, когда дуга имеет отрицательную ориентацию, потому что в этом случае $x_{i-1} > x_i$, и, следовательно, разность $x_i - x_{i-1}$ отрицательна.

Рассмотрим затем такое i, для которого дуга $p_{i-1}p_i$ ориентирована положительно и содержит q, как на рис. 22.3. Складывая углы, определяемые дугами $p_{i-1}q$ и qp_i, получаем

$$A(\varphi_i,\ y) = 360 - x_{i-1} + x_i = x_i - x_{i-1} + 360.$$

Рассмотрим, наконец, такое i, для которого дуга $p_{i-1}p_i$ ориентирована отрицательно и содержит q, как

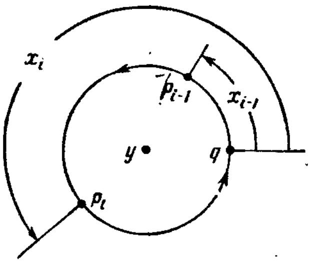


Рис. 22.2.

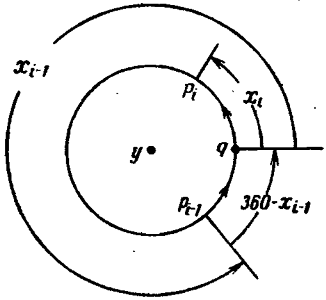


Рис. 22.3.

на рис. 22.4. Складывая углы, определяемые дугами $p_{i-1}q$ и qp_i, находим

$$A(\varphi_i,\ y) = -x_{i-1} - (360 - x_i) = x_i - x_{i-1} - 360.$$

Эти три случая исчерпывают все возможности. Если мы сложим все $A(\varphi_i,\ y)$, $i=1, 2, \ldots, m$, то каждый член будет содержать разность $x_i - x_{i-1}$, r членов будут содержать множитель $+360$ и s членов — множитель -360. Следовательно,

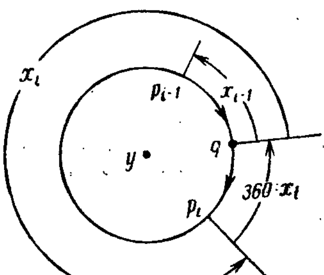


Рис. 22.4.

$$A(\varphi,\ y) = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) + r360 - s360 = x_m - x_0 + (r-s)360,$$

и теорема доказана.

Следствие. *Если* φ *— замкнутая кривая, то* $A(\varphi, y) = (r-s)360.$

Для доказательства следствия нужно только заметить, что, поскольку кривая замкнута, $\varphi a = \varphi b$ и, значит, $x_m = x_0$.

Теперь, наконец, мы в состоянии дать точное определение порядка кривой относительно точки: $W(\varphi, y) = A(\varphi, y)/360 = r - s$. Из следствия вытекает, что порядок есть целое число.

Упражнения

1. Чему равен порядок замкнутой кривой относительно точки y, если кривая является неполной относительно y?

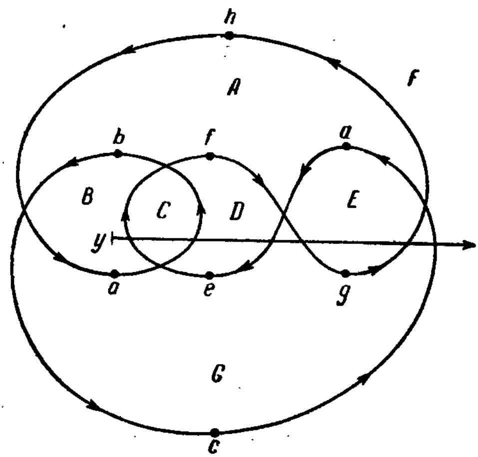


Рис. 22.5.

2. Замкнутая кривая на рис. 22.5 подразделена, как указано, восемью верхними и нижними точками, и деления транспортира, начальный луч которого идет, как изображено на рисунке, приведены в следующей таблице:

$\varphi t_i = a$,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h
$x_i = 270$,	90,	300,	20,	340,	45,	350,	60

a) Найти угол в точке y, заметаемый кривой от a до d; от b до g.

b) Найти порядок $W(\varphi, y)$ и проверить результат, полученный в упражнении 2 к § 17.

c) Указать другое направление для луча yq, которое сведет вычисление $W(\varphi, y)$ до минимума.

d) Для точки в каждой из областей A, B, ... проверить результаты, полученные в § 17 относительно порядка этой кривой.

§ 23. Свойства $A(\varphi, y)$ и $W(\varphi, y)$

Теперь $A(\varphi, y)$ и $W(\varphi, y)$ определены точно, и мы должны показать, что они обладают теми свойствами, о которых мы говорили раньше.

1. Если φ — постоянная кривая, то $A(\varphi, y)=0$ и $W(\varphi, y)=0$.

Так как образ $\varphi[a, b]$ есть точка, то φ является неполной кривой и ее тривиальное подразделение достаточно мелко. Но для неполных кривых из $\varphi a=\varphi b$ следует, что $x_a=x_b$. Поэтому $A(\varphi, y)=0$ и $W(\varphi, y)=$ $=A(\varphi, y)/360=0$.

2. Функция $A(\varphi, y)$ аддитивна относительно φ. Точнее, допустим, что $a<b<c$ и φ: $[a, c]\to P$. Пусть $\varphi_1=\varphi|[a, b]$ и $\varphi_2=\varphi|[b, c]$. Тогда $A(\varphi, y)=A(\varphi_1, y)+$ $+A(\varphi_2, y)$. Если же $\varphi a=\varphi b=\varphi c$ и φ_1, φ_2 и φ являются замкнутыми кривыми, то $W(\varphi, y)=W(\varphi_1, y)+W(\varphi_2, y)$.

Пусть $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — достаточно мелкие подразделения соответственно кривых φ_1 и φ_2. Тогда объединение вершин $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ дает достаточно мелкое подразделение $\mathscr{P}$ кривой φ. Так как члены суммы $A(\mathscr{P}, y)$ совпадают с членами суммы $A(\mathscr{P}_1, y)+A(\mathscr{P}_2, y)$, то очевидно, что

$$A(\mathscr{P}, y)=A(\mathscr{P}_1, y)+A(\mathscr{P}_2, y),$$

и первое соотношение доказано. В случае когда φ, φ_1 и φ_2 — замкнутые кривые, каждый член в этом соотношении является целым числом, кратным 360. Деля его на 360, убеждаемся в аддитивности порядка кривой относительно φ.

Упражнение

1. Вернемся к рисунку и значениям делений транспортира в упражнении 2 к § 22. Найти $A(\varphi_1, y)$ и $A(\varphi_2, y)$, если $\varphi t_0=a$, $\varphi t_1=d$ и $\varphi t_2=g$, и с помощью полученного в этом параграфе результата определить $A(\varphi|[t_0, t_2], y)$.

§ 24. Гомотопии кривых

В следующем параграфе мы покажем, что порядок кривой относительно точки остается постоянным, когда эта кривая или точка изменяются непрерывно (см. § 18). Наша цель в этом параграфе — точно описать, какого типа изменения мы будем считать допустимыми.

Определение. Пусть φ_0 и φ_1 — две кривые в пространстве Y, определенные в одном и том же замкнутом промежутке $[a, b]$. Тогда *гомотопия* кривой φ_0 в кривую φ_1 есть непрерывное отображение Φ прямоугольника Q в Y, отображающее нижнюю сторону Q на кривую φ_0, а верхнюю — на кривую φ_1. Точнее, пусть Q — прямоугольник на плоскости двух переменных (t, τ), определяемый условиями $a \leqslant t \leqslant b$ и $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Тогда гомотопия Φ кривой φ_0 в кривую φ_1 есть непрерывное отображение Φ: $Q \to Y$, такое, что

$$\Phi(t, 0) = \varphi_0 t \text{ и } \Phi(t, 1) = \varphi_1 t \text{ для всех } t \in [a, b].$$

В случае когда φ_0 и φ_1 — замкнутые кривые, гомотопия φ_0 в φ_1 как *замкнутых* кривых определяется, как и выше, но должно быть выполнено дополнительное условие:

$$\Phi(a, \tau) = \Phi(b, \tau) \text{ для всех } \tau \in [0, 1].$$

Чтобы сделать это определение понятным, представим себе, что прямоугольник Q составлен из горизонтальных прямолинейных отрезков s_τ каждому значению $\tau \in [0, 1]$ соответствует один такой отрезок. Условием $\varphi_\tau t = \Phi(t, \tau)$ сужение отображения Φ на отрезке s_τ определяет кривую $\varphi : [a, b] \to Y$. Таким образом, мы получаем семейство кривых — по одной для каждого значения τ между 0 и 1 (рис. 24.1). Если считать, что переменная есть время, то это семейство кривых мы можем рассматривать как различные положения одной и той же единственной движущейся кривой. Имея в виду такую интерпретацию, гомотопию часто называют *деформацией*.

Если две кривые φ_0 и φ_1 отображают промежуток $[a, b]$ в плоскость P или в пространство R^m, то существует гомотопия специального вида кривой φ_0 в кривую φ_1, называемая *линейной* гомотопией. Для каждой пары $(t, \tau) \in Q$ возьмем в качестве $\Phi(t, \tau)$ точку, которая прямолинейный отрезок, идущий от $\varphi_0 t$ в $\varphi_1 t$,

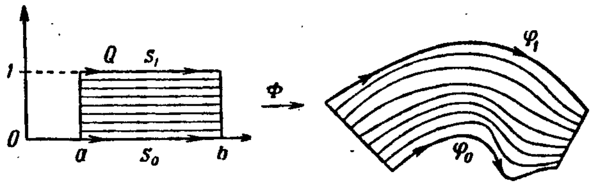


Рис. 24.1.

делит в отношении $\tau : (1-\tau)$ (рис. 24.2). Отношение $0:1$ дает начало этого отрезка, а отношение $1:0$ — его конец; поэтому $\Phi(t, 0) = \varphi_0 t$ и $\Phi(t, 1) = \varphi_1 t$. Сужение отображения Φ на каждом из вертикальных от-

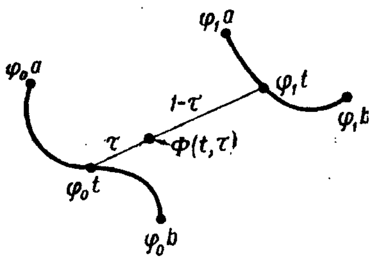


Рис. 24.2.

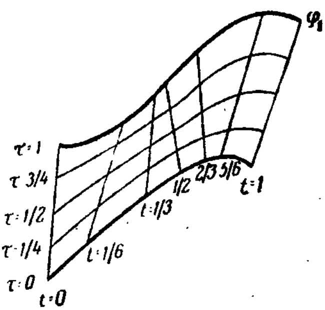


Рис. 24.3.

резков в Q является подобием, потому что сохранение отношения есть характеристическое свойство подобия.

Рис. 24.3 служит иллюстрацией линейной гомотопии. Положения движущейся кривой вычерчены для моментов времени $\tau = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ и 1, а прямолинейные пути, по которым движутся различные точки кривой, изображены для $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ и 1.

Заметим, что каждая отдельная точка кривой движется по прямой с постоянной скоростью.

Нам нужно доказать, что линейная гомотопия Φ непрерывна[1]. Пусть (c, γ) — координаты точки прямоугольника Q, непрерывность отображения Φ в которой мы хотим доказать, и (t, τ) — координаты лю-

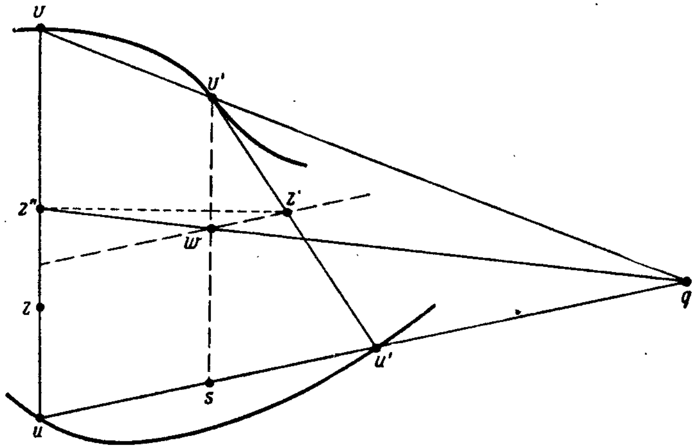


Рис. 24.4.

бой другой точки этого прямоугольника. Введем следующие сокращения:

$$u = \varphi_0 c, \quad v = \varphi_1 c, \quad z = \Phi(c, \gamma), \quad z'' = \Phi(c, \tau),$$
$$u' = \varphi_0 t, \quad v' = \varphi_1 t, \quad z' = \Phi(t, \tau).$$

На рис. 24.4 изображена ситуация в случае, когда точка (t, τ) близка к (c, γ). Отрезки uv и $u'v'$ представляют из себя пути, по которым движутся точки φc и φt, когда τ меняется от 0 до 1. Мы хотим показать,

[1]) Для читателя, знакомого с векторной алгеброй, мы можем записать $\Phi(t, \tau) = (1 - \tau)(\varphi_0 t) + \tau(\varphi_1 t)$ и заметить, что функция $(1 - \tau)(\varphi_0 t)$ непрерывна как произведение непрерывной скалярной функции $1 - \tau$ и непрерывной векторной функции $\varphi_0 t$. По той же причине непрерывна и функция $\tau(\varphi_1 t)$. Наконец, функция $\Phi(t, \tau)$ непрерывна как сумма двух непрерывных векторных функций.

что расстояние $d(z, z')$ может быть сделано малым (меньшим, чем заданное $\varepsilon>0$), если потребовать, чтобы точка (t, τ) была близка к (c, γ). По неравенству треугольника

$$d(z, z') \leqslant d(z, z'') + d(z'', z').$$

Так как отображение промежутка $[0, 1]$ в отрезок uv, переводящее точку τ в точку $\Phi(c, \tau)$, есть подобие, оно непрерывно. Поэтому для любого положительного числа $\varepsilon/2$ найдется такое $\delta'>0$, что

$$d(z, z'') < \varepsilon/2 \text{ для всех таких } \tau, \text{ что } |\tau - \gamma| < \delta'.$$

Поскольку функции φ_0 и φ_1 непрерывны в точке c, найдутся такие числа $\delta_0>0$ и $\delta_1>0$, что

$$d(u, u') < \varepsilon/2 \text{ для всех таких } t, \text{ что } |t - c| < \delta_0,$$
$$d(v, v') < \varepsilon/2 \text{ для всех таких } t, \text{ что } |t - c| < \delta_1.$$

Пусть теперь δ — наименьшее из чисел δ', δ_0 и δ_1. Если точка (t, τ) принадлежит окрестности $N((c, \gamma), \delta)$, то выполняются все три предыдущих неравенства. Можно показать, что расстояние $d(z'', z')$ не превосходит большего из расстояний $d(u, u')$ и $d(v, v')$. На рис. 24.4 показано, как это доказать, когда большим из них является $d(u, u')$. Проведем через v' прямую, параллельную vu и пересекающую uu' в точке s, и через z' прямую, параллельную uu' и пересекающую $v's$ в точке w. Тогда прямая qw пересечет vu в точке r, и из подобных треугольников видно, что эта точка делит отрезок vu в том же отношении, в каком точка z' делит отрезок $v'u'$; поэтому $r = z''$. Тогда

$$d(z'', z') \leqslant d(z'', w) + d(w, z') \leqslant$$
$$\leqslant d(u, s) + d(s, u') \leqslant d(u, u').$$

Следовательно, $d(z'', z') < \varepsilon/2$. Пользуясь еще тем, что $d(z, z'') < \varepsilon/2$, из неравенства треугольника получаем $d(z, z') < \varepsilon$. Тем самым непрерывность отображения Φ доказана.

В случае когда две кривые φ_0 и φ_1 замкнуты, линейная гомотопия кривой φ_0 в φ_1 является их гомотопией и как замкнутых кривых. В самом деле, из того, что $\varphi_0 a=\varphi_0 b$ и $\varphi_1 a=\varphi_1 b$, следует, что отрезки, идущие от $\varphi_0 a$ к $\varphi_1 a$ и от $\varphi_0 b$ к $\varphi_1 b$, совпадают, и, значит, $\Phi(a,\tau)=\Phi(b,\tau)$ для всех $\tau\in[0,1]$.

Если последняя кривая φ_1 какой-либо гомотопии является постоянной кривой, отображающей весь замкнутый промежуток в точку, то гомотопия называется *стягиванием* первоначальной кривой φ_0 в точку. Вот важный пример такого стягивания. Пусть D— круг с центром z и граничной окружностью C, а φ_0: $[0,1]\to C$ — стандартное представление окружности C в качестве замкнутой кривой (промежуток $[0,1]$ один раз наворачивается на окружность против часовой стрелки; см § 16). Пусть φ_1: $[0,1]\to z$ — постоянная кривая в центре круга, и пусть, наконец, Φ — линейная гомотопия кривой φ_0 в φ_1. Тогда Φ стягивает кривую φ_0 (или окружность C) в точку. Если мы нарисуем эту гомотопию как движущуюся кривую, то в каждый момент времени она будет окружностью с центром z, а любая ее точка движется к центру z по радиусу.

Пусть теперь f: $D\to P$ — отображение круга в плоскость, и Φ — только что описанная гомотопия. Тогда композиция $f\Phi$: $Q\to P$ является стягиванием замкнутой кривой $f\varphi_0$: $[a,b]\to P$ в постоянную замкнутую кривую $f\varphi_1$ в точке fz. Эта гомотопия и определяет то семейство замкнутых кривых, которое было использовано в интуитивном доказательстве нашей главной теоремы (§ 18).

Упражнения

1. Показать, что любая замкнутая кривая на плоскости гомотопна постоянной замкнутой кривой.
2. Показать, что кривая φ: $[a,b]\to Y$ в любом пространстве Y гомотопна постоянному отображению, причем при этой гомотопии один из концов кривой остается неподвижным.
3. Пусть $a<b<c$ — действительные числа, и φ: $[a,c]\to Y$ — кривая, удовлетворяющая условию: $\varphi a=\varphi b=\varphi c$. Допустим, что замкнутые кривые $\varphi|[a,b]$ и $\varphi|[b,c]$ гомотопны постоянным отображениям при неподвижных концах. Тогда и кривая φ гомотопна постоянному отображению при неподвижных концах.
4. Показать, что гомотопию Φ кривой φ_0 в кривую φ_1 можно обратить, получив гомотопию кривой φ_1 в кривую φ_0.

§ 25. Постоянство порядка кривой относительно точки

Теорема 25.1. *Пусть* Φ: $Q \to P$ *— гомотопия кривой* φ_0 *в кривую* φ_1 *как замкнутых кривых, и пусть* y *— точка, не принадлежащая образу* ΦQ. *Тогда порядок* $W(\varphi_\tau, y)$ *кривой* φ_τ *относительно точки* y, *когда* τ *меняется от* 0 *до* 1, *постоянен. В частности,* $W(\varphi_0, y) = W(\varphi_1, y)$.

Порядок $W(\varphi_\tau, y)$ сокращенно обозначим через $f\tau$. Тогда f есть функция, определенная на замкнутом промежутке $[0, 1]$, и, как показано в § 22, каждое ее значение является целым числом. Основная часть нашего рассуждения состоит в доказательстве того, что f не меняется при «малых изменениях» τ. Точнее, если $\alpha \in [0, 1]$, то существует такая окрестность N_α точки α, что $f\tau = f\alpha$ для всех $\tau \in N_\alpha$. После того как это будет установлено, теорема доказывается следующим образом. Так как функция f на N_α постоянна, то она непрерывна на N_α и, значит, непрерывна в точке α. Поскольку это верно для каждого α, то функция f непрерывна на промежутке $[0, 1]$. Если бы теперь функция f не была постоянной и принимала хотя бы два различных значения, то из главной теоремы части I следовало бы, что она принимала бы и все значения, промежуточные между ними, а среди них и нецелые значения. Но это противоречит тому, что все значения функции f целочисленны. Поэтому функция f должна быть постоянной.

Чтобы доказать, что порядок кривой вблизи точки $\alpha \in [0, 1]$ постоянен, выберем подразделение $\mathscr{P}$ кривой φ_α, достаточно мелкое для точки y. Сначала мы найдем окрестность N' точки α, обладающую тем свойством, что для всех $\tau \in N'$ подразделение кривой φ_τ с теми же вершинами достаточно мелко для y; это подразделение мы будем обозначать той же буквой $\mathscr{P}$. А затем, пользуясь методом вычисления порядка кривой, описанным в § 22, мы найдем еще меньшую окрестность N, для которой *каждый отдельный шаг вычисления дает одно и то же число.*

Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_m$ — вершины подразделения $\mathscr{P}$. Для каждого частичного промежутка $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ достаточная мелкость подразделения $\mathscr{P}$ означает, что существует луч L_k с вершиной в y, не пересекающий $\varphi_\alpha I_k$. Пусть D_k — прямолинейный отрезок в прямоугольнике Q, идущий от (t_{k-1}, α) до (t_k, α). Мы покажем, что существует такой прямоугольник E_k, содержащий D_k, образ которого ΦE_k не пересекает луч L_k. Пусть

$$V_k = \Phi^{-1}(P - L_k).$$

Так как отображение Φ непрерывно, а $P - L_k$ является открытым множеством, то V_k открыто в Q. Из того, что $\Phi D_k = \varphi_\alpha I_k$ содержится в $P - L_k$, следует, что $D_k \subset V_k$. Для каждой точки $p \in D_k$ мы можем выбрать окрестность $N(p)$ относительно Q, содержащуюся в V_k. Пусть тогда $M(p)$ — внутренность наибольшего квадрата со сторонами, параллельными t- и τ-осям, который содержится в $N(p)$. Совокупность всех этих $M(p)$ для $p \in D_k$ является открытым покрытием отрезка D_k. Так как этот отрезок компактен, из данного покрытия можно выделить конечное подпокрытие, скажем $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Пусть δ_k — половина стороны наименьшего из этих квадратов, и E_k — прямоугольник, состоящий из точек (t, τ), у которых $t \in I_k$ и

$$|\tau - \alpha| < \delta_k.$$

В силу выбора δ_k тогда

$$E_k \subset M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \subset V_k.$$

Это значит, что $\varphi_\tau I_k \subset P - L_k$ для любого $\tau \in N(\alpha, \delta_k)$. Предположим, что это построение проведено для каждого промежутка I_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, и обозначим через δ наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$. Пусть $N' = N(\alpha, \delta)$. Тогда для любого $\tau \in N'$ мы имеем $\varphi_\tau I_k \subset P - L_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Это доказывает, что для каждого $\tau \in N'$ подразделение $\mathscr{P}$ кривой φ_τ достаточно мелко для точки y.

Применим теперь метод § 22 вычисления порядка кривой к этому разбиению $\mathscr{P}$ и различным кривым φ_τ при $\tau \in N'$. Как и в § 22, C обозначает окружность с центром y и радиусом 1. Пусть g: $(P - y) \to C$ есть радиальная проекция из центра y на окружность C.

Тогда функции $g\Phi$: $Q \to C$ и $g\varphi_\tau$: $[a, b] \to C$ непрерывны как композиции непрерывных функций. Образ на окружности C вершины t_k подразделения $\mathscr{P}$ при отображении $g\varphi_\tau$, а именно точку $g\varphi_\tau t_k$, будем сокращенно обозначать символом $p_k\tau$. Пусть $A_k\tau$ — дуга окружности C от $p_{k-1}\tau$ до $p_k\tau$, не пересекающая луча L_k. Если q — точка на C, отличная от $p_0\tau, p_1\tau, \ldots, p_m\tau$, то, как в § 22, порядок $W(\varphi_\tau, y)$ равен $f\tau = r - s$, где r (соответственно s) есть число положительно (отрицательно) ориентированных дуг $A_k\tau$, содержащих q.

Возьмем точку $q \in C$, отличную от $p_0\alpha, p_1\alpha, \ldots, p_m\alpha$, и для каждого $k=1, 2, \ldots, m$ выберем окрестность U_k точки $p_k\alpha$ на C, не содержащую точки q и не пересекающую ни L_k, ни L_{k-1}. Тогда U_k будет неполной дугой окружности C, содержащей точку $p_k\alpha$. Так как отображение $g\Phi$ непрерывно, U_k есть окрестность точки $p_k\alpha$ и $g\Phi(t_k, \alpha) = p_k\alpha$, то найдется такая окрестность N_k точки α в промежутке $[0, 1]$, что при всех $\tau \in N_k$ образ $g\Phi(t_k, \tau) = p_k\tau$ точки τ лежит в U_k. Пусть N — наименьшая из окрестностей N' и $N_1, N_2, \ldots, N_m$. Тогда из условия $\tau \in N$ следует, что $p_k\tau \in U_k$ для каждого $k=1, 2, \ldots, m$. (Заметим, что $p_m\tau = p_0\tau$, потому что каждая из кривых φ_τ является замкнутой.) В частности, точка q отлична от точек $p_0\tau, p_1\tau, \ldots, p_{m-1}\tau$, так как q не принадлежит ни одной из окрестностей U_k.

Остается показать, что для любой точки $\tau \in N$ и каждого $k=1, 2, \ldots, m$ две дуги $A_k\tau$ и $A_k\alpha$ находятся в одинаковом отношении к точке q, так как в этом случае мы получим для φ_τ то же самое число $r-s$, что и для φ_α. Рассмотрим сначала такой номер k, для которого U_{k-1} и U_k имеют общую точку. Тогда $U_{k-1} \cup U_k$ есть связная дуга, а ее дополнение D в C является связной дугой, пересекающей L_k, содержащей q, но при всех $\tau \in N$ не содержащей ни $p_{k-1}\tau$, ни $p_k\tau$. Так как дуга D связна, она целиком лежит в одной из двух дуг окружности C с концами $p_{k-1}\tau$ и $p_k\tau$. Одной из этих двух дуг является дуга $A_k\tau$, а вторая из них пересекает L_k. Поскольку D пересекает L_k, ясно, что D не пересекает $A_k\tau$. Так как точка q принадлежит D, тем самым доказано, что при всех $\tau \in N$

дуга $A_k\tau$ не содержит q. Таким образом, в этом случае отношение дуги $A_k\tau$ к точке q не меняется при всех $\tau \in N$; иными словами, если точку q не содержит дуга $A_k\alpha$, то ее не содержат и все дуги $A_k\tau$ при $\tau \in N(\alpha)$.

Рассмотрим теперь такой номер k, для которого окрестности U_{k-1} и U_k общих точек не имеют. Тогда дополнение объединения $U_{k-1} \cup U_k$ в C состоит из двух дуг D и E; пусть D — та из этих дуг, которая пересекает L_k. Рассуждая, как и выше, видим, что для всех точек $\tau \in N$ дуга D не пересекается с $A_k\tau$. Кроме того, так как дуга E не пересекает L_k, все дуги $A_k\tau$ при $\tau \in N$ содержат дугу E и одинаково ориентированы от U_{k-1} к U_k. Поскольку точка q не принадлежит объединению $U_{k-1} \cup U_k$, она должна лежать в $D \cup E$. Если $q \in D$, то ни одна из дуг $A_k\tau$ при $\tau \in N$ не содержит q. Если же $q \in E$, то все дуги $A_k\tau$ при $\tau \in N$ содержат q и одинаково ориентированы. Таким образом, отношение дуги $A_k\tau$ к точке q не меняется при всех $\tau \in N$. Это завершает доказательство того, что при всех $\tau \in N$ порядок $f\tau$ постоянен. Из рассуждения, которое мы провели сразу после того, как сформулировали теорему, немедленно вытекает постоянство порядка замкнутой кривой при ее гомотопии.

Теорема 25.2. *Пусть* φ: $[a, b] \to P$ — *замкнутая кривая на плоскости, и пусть* y_0 *и* y_1 — *две точки плоскости* P, *не лежащие на кривой* φ *и обладающие тем свойством, что их можно соединить кривой* ψ: $[0, 1] \to P$, *не пересекающей* φ. *Тогда порядки кривой* φ *относительно точек* y_0 *и* y_1 *совпадают, т. е.* $W(\varphi, y_0) = W(\varphi, y_1)$.

Для каждого $t \in [a, b]$ и каждого $\tau \in [0, 1]$ обозначим через $\Phi(t, \tau)$ конец вектора с началом в φt, который параллелен идущему из $\psi\tau$ в y_0 вектору и имеет ту же длину (см. рис. 25.1). Таким образом, если мы положим $\varphi_\tau t = \Phi(t, \tau)$, то при фиксированном τ кривая φ_τ будет получаться параллельным переносом кривой φ. Будем себе представлять плоскость как жесткий металлический лист, в котором вдоль кривой ψ вырезана щель. Прибьем этот лист к стене в точке y_0 гвоздем, диаметр которого меньше, чем ширина щели. Теперь будем перемещать лист по стене, не допуская при этом, чтобы он вращался, и следя за тем, чтобы гвоздь все время шел по щели. Тогда по-

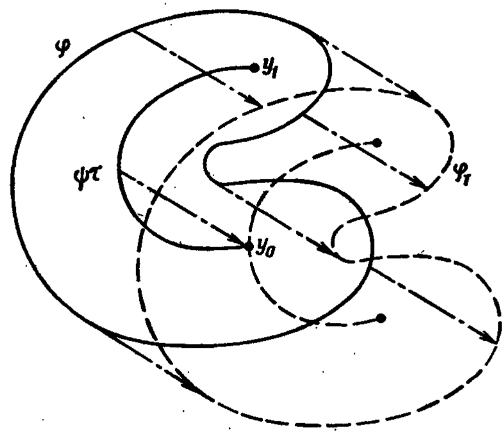


Рис. 25.1.

лучающееся в результате движение замкнутой кривой φ будет изображать построенную нами гомотопию Φ.

Из постоянства порядка кривой при гомотопии следует, что $W(\varphi_0, y_0) = W(\varphi_1, y_0)$. Кроме того, пара (φ_1, y_0) совмещается с парой (φ_0, y_1) при параллельном переносе плоскости на вектор, идущий из y_0 в y_1. Так как при движении порядок кривой относительно точки, очевидно, не меняется, $W(\varphi_1, y_0) = W(\varphi_0, y_1)$. Сопоставляя эти равенства, приходим к заключению теоремы.

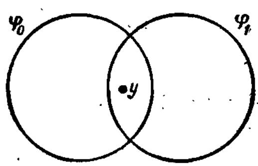


Рис. 25.2.

Упражнения

1. Показать, что порядок окружности φ_0 на рис. 25.2 относительно точки y равен порядку окружности φ_1 того же радуса относительно точки y, определив гомотопию, к которой можно применить теорему 25.1.

2. Указав гомотопию, объяснить, почему на рис. 25.3 $W(\varphi_0, y) = W(\varphi_1, y)$ и почему с помощью этой гомотопии нельзя доказать, что равны порядки $W(\varphi_0, x)$ и $W(\varphi_1, x)$.

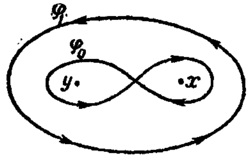


Рис. 25.3.

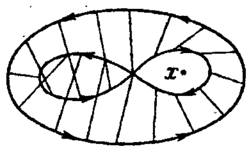


Рис. 25.4.

3. Объяснить, почему гомотопия на рис. 25.4 не пригодна для упражнения 2 в качестве гомотопии, при которой кривая не пересекает точки x.

§ 26. Доказательство главной теоремы

Теперь в наших руках имеется все, что нужно для доказательства главной теоремы, сформулированной в § 18. Допустим, что точка y не принадлежит образу fD. Пусть φ_0: $[0, 1] \to C$ — стандартное представление окружности C как замкнутой кривой. Пусть Φ — описанная в § 24 гомотопия, стягивающая кривую φ_0

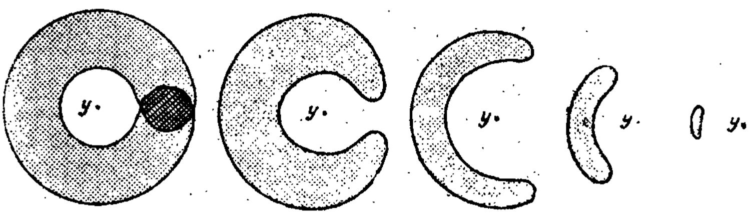


Рис. 26.1.

по кругу D в центр z этого круга. Тогда $f\Phi$ есть гомотопия кривой $f\varphi_0$ в постоянную замкнутую кривую в точке fz. Так как $f\Phi Q \subset fD$, точка y не принадлежит образу при этой гомотопии. Следовательно, по теореме 25.1 $W(f\varphi_0, y) = W(f\varphi_1, y)$. Так как $f\varphi_1$ — постоянная кривая, то $W(f\varphi_1, y) = 0$ (см. § 23). Поэтому $W(f\varphi_0, y) = 0$. Итак, мы доказали, что если y не принадлежит fD, то $W(f\varphi_0, y) = 0$. Таким образом, из условия $W(f\varphi_0, y)\neq 0$ следует, что $y \in fD$. Это завершает доказательство. (Рис. 26.1 иллюстрирует последовательные стадии гомотопии $f\Phi$ для отображения f, описанного в § 15).

Упражнение

1. Как нужно изменить доказательство теоремы в случае, когда круг D, о котором говорится в теореме, заменен прямоугольником D' вместе с его внутренностью? Что заменяет стандартное представление кривой φ_0 и гомотопию Φ?

§ 27. Порядок окружности относительно каждой внутренней точки равен единице

В этом параграфе мы покажем, что если непрерывное отображение круга D в плоскость оставляет неподвижными все точки его границы, то все точки круга D лежат в его образе. В качестве подготовительного шага к этой теореме мы докажем сначала одно утверждение, которое в § 17 считали интуитивно очевидным: порядок окружности относительно каждой внутренней точки равен единице.

Лемма. *Пусть C — окружность, y — точка в плоскости этой окружности, лежащая внутри C, и* φ_0: $[0, 1]\to C$ *— стандартное представление окружности C как замкнутой кривой* (см. § 16). *Тогда* $W(\varphi_0, y)=1$.

Для доказательства рассмотрим подразделение $\mathcal{P}=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Напомним, что кривая φ_0 определяется выбором в качестве начала отсчета некоторой точки $\varphi_0 0$, а затем каждая точка $t\in[0, 1]$ отображается в ту точку окружности C, угловое расстояние которой в градусах от точки $\varphi_0 0$ равно $360\,t$. Следовательно, $\varphi_0\left[0, \frac{1}{2}\right]$ есть полуокружность от точки $\varphi_0 0$ до $\varphi_0\frac{1}{2}$ в направлении против часовой стрелки, а $\varphi_0\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ — полуокружность от $\varphi_0\frac{1}{2}$ до $\varphi_0 1=\varphi_0 0$ в том же направлении (рис. 27.1). Если y — центр круга, то правило из § 22 дает: $W(\varphi_0, y)=r-s$, где $r=1$

и $s=0$. Таким образом, для центра круга лемма верна. Но каждую внутреннюю точку можно соединить с центром прямолинейным отрезком, не пересекающим C. Поэтому по теореме 25.2 порядок кривой φ_0 относительно такой точки совпадает с ее порядком относительно центра.

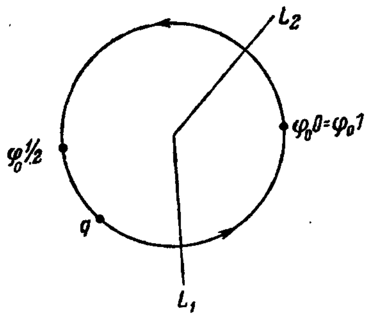


Рис. 27.1.

Чтобы наглядно представить себе следующее предложение, рассмотрим круглый, тонкий и гибкий резиновый диск, край которого приклеен к столу. Если бы мы захотели увидеть, что находится под этим диском, то до тех пор, пока край его остается неподвижным, мы ничего не смогли бы добиться, как бы мы диск не деформировали.

Теорема 27.1. *Пусть f: $D \to P$ — непрерывное отображение круга в плоскость, оставляющее неподвижными все точки граничной окружности C. Тогда образ fD круга D содержит все точки этого круга.*

Пусть φ_0: $[0, 1] \to C$ — стандартное представление окружности C как замкнутой кривой и y — внутренняя точка круга D. Так как отображение f оставляет неподвижной каждую точку окружности C, сужение $f|C$ является тождественным отображением, т. е. $f\varphi_0=\varphi_0$. Следовательно, $W(f\varphi_0, y)=W(\varphi_0, y)$. Предыдущая лемма утверждает, что $W(\varphi_0, y)\neq 0$; поэтому и $W(f\varphi_0, y)\neq 0$. Тогда в силу главной теоремы $y\in fD$. Кроме того, поскольку $fC=C$, каждая точка окружности C принадлежит fD. Следовательно, образу fD принадлежат все точки круга D.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 27.2. *Не существует непрерывного отображения круга D в его границу C, оставляющего неподвижными все точки C.*

Можно, конечно, отобразить прямоугольник вместе с его внутренностью на одну из его сторон, оставляя неподвижными все точки этой стороны. Представим себе сворачивание переносного киноэкрана; при этом отображении f для всех точек x валика $fx=x$. Сторона, соответствующая этому валику, называется *ретрактом* рассматриваемой прямоугольной области (экрана). Следствие утверждает, что мы не можем навернуть весь круг на ограничивающую его окружность, т. е. окружность не является ретрактом круга. Будем, например, считать, что окружность — это обод барабана, а внутренность круга — кожа, натянутая на этот барабан. Тогда утверждается, что всю эту кожу нельзя растянуть и навернуть на обод. Имея в виду такое наглядное представление, следствие 27.2 иногда называют принципом барабана.

Упражнения

1. Показать, что граница E прямоугольной области F не является ретрактом области F; сформулировать теорему, следствие и провести доказательство, соответствующее этому случаю. *Указание*: рассмотреть гомеоморфизм $h: P \to P$, отображающий круг D на область F (этот гомеоморфизм определяется, как в § 14: центр z круга D отображается в центр hz области F, а каждый луч с вершиной в z — на параллельный ему луч с вершиной в hz).
2. Пусть y — точка границы C круга D. Показать, что существует непрерывное отображение множества $D—y$ на множество $C—y$, оставляющее неподвижными все точки из $C—y$.
3. Показать, что если y_0 — произвольная точка, лежащая внутри круга D, то окружность C является ретрактом множества $D—y_0$.
4. Показать, что каждое из следующих множеств является ретрактом круга D:
   a) любой диаметр круга D;
   b) любая точка круга D.
5. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное следствию 27.2, в одномерном случае.

§ 28. Свойство неподвижной точки

В § 9 части I мы доказали, что любое непрерывное отображение прямолинейного отрезка в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку. Теперь мы докажем аналогичную теорему для круга.

Теорема 28.1. *Пусть f: $D \to D$ — непрерывное отображение круга в себя. Тогда отображение f оставляет неподвижной по крайней мере одну точку круга D, т. е. найдется хотя бы одна точка $x \in D$, для которой $fx = x$.*

Предположим, напротив, что существует непрерывное отображение f: $D \to D$, не имеющее неподвижных точек. Тогда для каждой точки $x \in D$ точки fx и x различны. Поэтому мы можем построить луч L_x с вершиной fx, проходящий через x. Пусть gx — точка окружности C, в которой луч L_x пересекает C. В случае когда сама точка fx лежит на окружности C, gx — другая точка, в которой луч L_x пересекает C; если же $x \in C$, то $gx = x$. На рис. 28.1 можно увидеть некоторые

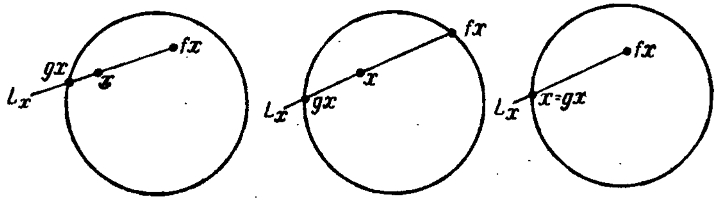


Рис. 28.1.

из этих возможностей. Таким образом, g: $D \to C$ и сужение $g|C$ есть тождественное отображение. Мы докажем, что отображение g непрерывно. Тогда существование отображения g будет противоречить следствию 27.2, и тем самым наша теорема будет доказана.

Чтобы доказать непрерывность отображения g, возьмем точку $x_0 \in D$, и пусть V — произвольная окрестность точки gx_0. Мы построим такую окрестность U точки x_0, что из $x \in U$ будет следовать $gx \in V$. Пусть b и c — концы дуги V и m — середина прямолинейного отрезка, соединяющего x_0 и fx_0. Обозначим буквой H прямую, проходящую через b и m, и буквой K — прямую, проходящую через c и m. Выберем окрестность N точки fx_0, не содержащую точек прямых H и K. Так как отображение f непрерывно, найдется такая окрестность U' точки x_0, что $fU' \subset N$. Выберем теперь окрестность U точки x_0, не содержащую точек прямых H и K и удовлетворяющую условию $U \subset U'$. Мы имеем тогда ситуацию, изображенную

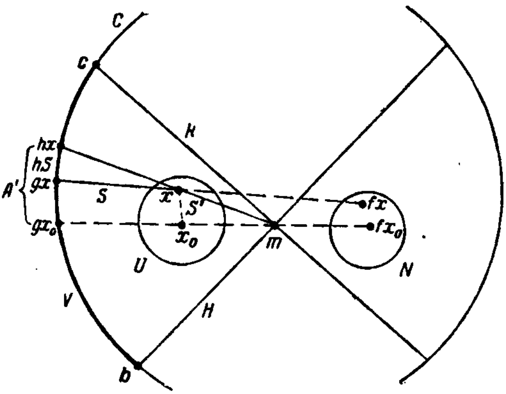


Рис. 28.2.

на рис. 28.2: U — окрестность точки x_0, N — окрестность точки fx_0, ни U, ни N не пересекают прямых H и K и $fU \subset N$. Кроме того, любая точка $x \in U$ и ее образ $fx \in N$ лежат по разные стороны от прямой H (и от прямой K), поскольку по разные стороны от H (и от K) лежат точки x_0 и fx_0, а U и N — связные множества, не пересекающие H (и K).

Поэтому луч L_x с вершиной в fx, проходящий через x, пересекает обе прямые H и K между fx и x. Следовательно, отрезок S луча L_x с концами x и gx не содержит точек прямых H и K. Пусть h — радиальная проекция из точки m на окружность C. Так как m лежит на луче L_{x_0}, отображение h переводит x_0 в gx_0. Далее, отрезок S', соединяющий точки x_0 и x, отображается при h на дугу A' окружности C, имеющую одним из своих концов точку gx_0. Так как отрезок S' не пересекает ни H, ни K, дуга A' не может содержать точек b и c. Поэтому дуга A' целиком лежит в V и, значит, $hx \in V$. Поскольку прямые H и K не пересекает и отрезок S, отсюда, как и выше, следует, что $hS \subset V$. Радиальной проекцией точки gx из m на окружность C является сама точка gx, т. е. $hgx = gx$. Сопоставляя три утверждения: $gx \in S$, $gx = hgx$ и $hS \subset V$, получаем, что $gx \in V$, и это завершает доказательство непрерывности отображения g.

Упражнения

1. Пусть D — круг с центром z и радиусом r. Найти неподвижные точки каждого из следующих отображений круга D в себя:
   a) вращение вокруг центра;
   b) отражение относительно диаметра;
   c) сжатие к центру;
   d) сжатие вдвое к центру, за которым следует параллельный перенос на $\frac{1}{3} r$;
   e) отражение относительно вертикального диаметра, за которым следует сжатие вдвое к центру, а затем параллельный перенос вправо на $\frac{1}{3} r$;
   f) каждый луч с вершиной в z отображается на луч с вершиной в z, образующий с горизонтальным диаметром угол, вдвое больший, чем первоначальный луч, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, и после этого производится параллельный перенос влево на $\frac{1}{3} r$.
2. Показать, что если множество E гомеоморфно кругу D, то любое непрерывное отображение $E \to E$ имеет неподвижную точку.

§ 29. Векторные поля

Вектор на плоскости или в пространстве — это упорядоченная пара точек. Обычно вектор изображают в виде прямолинейного отрезка, соединяющего две данные точки и направленного от первой точки ко второй, причем это направление указывается стрелкой. Алгебраические свойства векторов делают их незаменимым орудием для изучения евклидовых пространств высших размерностей. Чрезвычайно важную роль играют векторы в математической физике, где их применяют для представления сил, скоростей и ускорений.

Для того чтобы иметь возможность интуитивно оценивать теоремы, доказываемые в следующих параграфах, мы будем пользоваться понятием вектора скорости. Если движущаяся точка проходит через точку x, то *вектор скорости* в точке x есть вектор v с началом в x, направление которого совпадает с направлением движения в данный момент, а длина равна

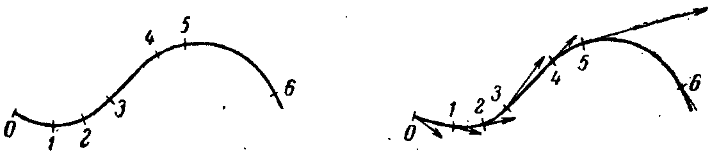


Рис. 29.1.

мгновенной скорости. Если бы точка продолжала двигаться в том же направлении и с той же скоростью, то за единицу времени она попала бы в конец x' вектора v. Проще всего дело обстоит, когда скорость постоянна (т. е. постоянна и по величине, и по направлению), но нам придется рассматривать движение точки по кривой, а в этом случае в процессе движения точки обычно будут меняться и величина, и направление скорости. Вектор скорости в каждой точке кривой лежит на касательной к этой кривой и имеет то же направление, что и кривая, а его длина равна мгновенной скорости (длине дуги, пробегаемой в единицу времени). Например, точки, помеченные на рис. 29.1 цифрами 0, 1, 2, 3, ..., указывают различные положения точки, движущейся по кривой, причем путь от любого из этих положений до следующего она проходит за равные промежутки времени. Векторы, касательные к кривой в каждой из этих точек, указывают тогда скорость движущейся точки. Таким образом, меньшие векторы скорости в 1 и 2 соответствуют маленьким расстояниям от 1 до 2 и от 2 до 3. В точке 3 скорость резко увеличивается, затем в точке 4 несколько уменьшается, а в точке 5 опять стремительно возрастает и т. д.

Векторное поле v есть функция, которая каждой точке x некоторой области иа плоскости (или в пространстве) ставит в соответствие вектор vx с началом в x. Если рассмотреть течение жидкости или газа, то векторы скорости различных частиц в один и тот же момент времени образуют векторное поле. Например, при установившемся течении в постоянном направлеиии с постоянной скоростью все эти векторы параллельны и имеют одну и ту же длину. В качестве другого примера рассмотрим вращение плоскости с постоянной угловой скоростью вокруг принадлежащей ей точки z (рис. 29.2). Вектор vx в точке x перпендикулярен прямой, проходящей через z и x, а его длина пропорциональна расстоянию $d(z, x)$. Вектором vz служит упорядоченная пара (z, z); он не имеет направления, а его длина равна нулю. Такой вектор называется *нулевым вектором.*

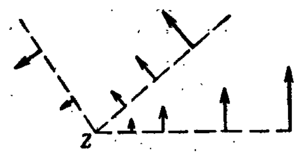


Рис. 29.2.

Течение жидкости, поле скоростей которого все время остается одним и тем же, называется *установившимся течением.* Точнее, вектор скорости зависит только от положения частицы на плоскости (или в пространстве) и не зависит от времени. Две частицы, проходящие через одну и ту же точку в разные моменты времени, имеют в этой точке один и тот же вектор скорости. Два рассмотренных выше примера были примерами установившегося течеиия. Такие течения имеют *линии тока*; так называются траектории частиц. Они образуют семейство кривых, обладающее тем свойством, что через каждую точку проходит одна и только одна кривая этого семейства и вектор скорости в каждой точке касателен к этой кривой. Частицы, принадлежащие любой лнниц тока, все время остаются на этой линии. Можио считать, что линия тока скользит по себе. В первом из рассмотренных выше примеров линии тока образуют семейство параллельных прямых. Во втором примере онн образуют семейство окружностей с центром z. Линия тока, проходящая через z, есть постоянная кривая в точке z.

§ 30. Эквивалентность векторных полей и отображений

На первый взгляд может показаться, что с понятием векторного поля в математике иметь дело довольно трудно. Однако векторное поле, определенное на некотором плоском множестве, полностью эквивалентно отображению этого множества в плоскость, причем соответствие между ними можно установить следующим образом. Пусть $f: A \to P$ — отображение множества $A \subset P$ в плоскость P. Выберем фиксированную точку o в плоскости P, называемую *началом*. Для каждой точки $x \in A$ в качестве vx возьмем вектор, который начинается в x, параллелен идущему от o до fx вектору и имеет ту же длину. Итак, каждому отображению f поставлено в соответствие некоторое векторное поле v. Наоборот, если на множестве A задано векторное поле v, то мы можем определить отображение f, условившись, что fx есть конец вектора с началом в o, который параллелен и равен по длине вектору vx. Легко видеть, что это соответствие между векторными полями и отображениями взаимно однозначно.

Чтобы еще раз объяснить, как устанавливается это соответствие, воспользуемся понятием эквивалентности двух векторов. Два вектора называются *эквивалентными*, если они параллельны, имеют одну и ту же длину и одинаковое направление. В случае когда один из них нулевой вектор, и второй вектор должен быть нулевым. Если теперь v — векторное поле, то вектору vx с точкой приложения x эквивалентен единственный вектор с точкой приложения o, и этот вектор однозначно определяет свой конец fx. Наоборот, если $f: A \to P$ — некоторое отображение, то соответствующее векторное поле v мы получаем, взяв в качестве vx вектор с точкой приложения x, эквивалентный вектору, идущему от o до fx.

На левом чертеже рис. 30.1 изображено векторное поле на окружности C радиуса r, состоящее из касательных векторов длины $r/2$, направленных против часовой стрелки. На правом чертеже мы видим об-

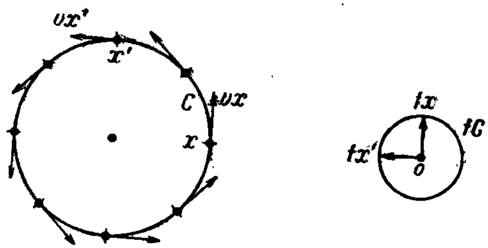


Рис. 30.1.

раз fC окружности C при соответствующем отображении f. В этом случае отображение f с помощью подобия переводит C в окружность вдвое меньшего радиуса с центром o и поворачивает эту окружность

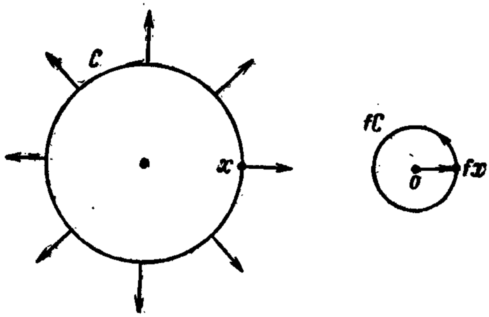


Рис. 30.2.

на 90°. Рис. 30.2 иллюстрирует поле внешних нормалей длины $r/2$. На этот раз отображение f переводит C в окружность вдвое меньшего радиуса, но без вращения. Поле внутренних нормалей той же длины давало бы отображение f, получающееся из предыдущего при повороте окружности fC вокруг точки o на 180°.

В случае когда f есть постоянная функция, образ fx при всех $x \in A$ есть одна и та же точка. Тогда упорядоченная пара (o, fx) для всех $x \in A$ единственна, и все векторы соответствующего поля параллельны и имеют одну и ту же длину и направление. Такое поле называется *постоянным*.

С помощью рассмотренного взаимно однозначного соответствия между векторными полями и отображениями можно на векторные поля перенести понятия и свойства, установленные для отображений. Например, векторное поле v называется *непрерывным*, если непрерывна соответствующая функция f.

Упражнения

1. Для каждого из следующих отображений плоскости P в себя описать или нарисовать соответствующее векторное поле:
   a) f отображает все точки плоскости P в одну точку, отличную от начала;
   b) f — тождественное отображение;
   c) f — вращение вокруг начала на 180°;
   d) f — параллельный перенос плоскости в заданном направлении на заданное расстояние;
   e) f — отражение относительно прямой, проходящей через o.

§ 31. Индекс векторного поля относительно замкнутой кривой

Пусть v — непрерывное векторное поле на некотором множестве A в плоскости P, и пусть φ: $[a, b] \to A$ — замкнутая кривая в A. Будем себе представлять эту кривую как траекторию движущейся точки. В каждом положении точки x на этой кривой определен вектор vx. Когда точка обегает кривую, этот вектор непрерывно изменяется как по направлению, так и по длине; когда точка вернется в свое первоначальное положение, вектор будет иметь первоначальное направление и длину. Можно спросить: сколько полных оборотов совершит этот вектор, когда точка обежит кривую? Чтобы сформулировать этот вопрос и ответ на него более точно, воспользуемся соответствующим отображением f: $A \to P$, описанным в § 30. Композиция $f\varphi$: $[a, b] \to P$ есть замкнутая кривая в плоскости P. Если начало o не лежит на этой кривой, то определен порядок $W(f\varphi, o)$. Мы будем его также называть *индексом* векторного поля v относительно замкнутой кривой φ и обозначать символом $I(v, \varphi)$. Таким образом,

$$I(v, \varphi) = W(f\varphi, o).$$

В примере на рис. 30.1 мы, очевидно, имеем $I(v, C) = 1$. Это же верно для примера на рис. 30.2, а также и для третьего примера внутренних норма-

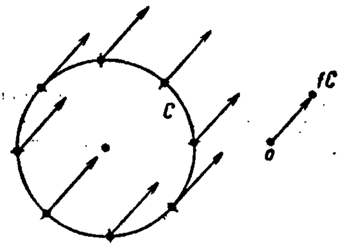


Рис. 31.1.

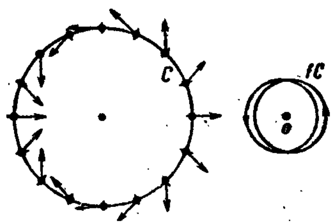


Рис. 31.2.

лей. Однако постоянное поле, как на рис. 31.1, имеет индекс нуль. Поле индекса 2 на окружности изображено на рис. 31.2.

Теорема 31.1. *Пусть v — непрерывное векторное поле, определенное на круге D, обладающее тем свойством, что для любой точки x граничной окружности C круга D вектор vx не является нулевым. Если индекс поля v относительно окружности C не равен нулю, то найдется хотя бы одна точка $x \in D$, для которой вектор vx будет нулевым.*

Эта теорема является точным переводом нашей главной теоремы части II с языка «отображений» на язык «векторных полей». Пусть f: $D \to P$ — отображение, соответствующее полю v, и φ: $[0, 1] \to C$ — стандартное представление окружности C как замкнутой кривой. Тогда по предположению порядок $W(f\varphi, o) = I(v, \varphi)$ не равен нулю. Главная теорема утверждает, что уравнение $fx = o$ имеет в таком случае хотя бы одно решение x. Соответствующий вектор vx

должен тогда быть нулевым вектором, так как он эквивалентен вектору, идущему от o до o.

Теорема 31.2. *Пусть v — непрерывное поле ненулевых векторов, определенное на круге D. Тогда на границе C круга D существует хотя бы одна точка x, для которой вектор vx направлен по внешней нормали, и хотя бы одна точка x', для которой вектор vx' направлен по внутренней нормали; кроме того, существуют по крайней мере две точки окружности C, для которых соответствующие векторы касательны к C. Вообще для каждого угла α существует по крайней мере одна такая точка $x \in C$, для которой вектор vx образует с внешней нормалью в точке x угол α.*

Для этих заключений очень существенно предположение, что поле v не имеет нулей внутри D. Пусть, например, D — круг с центром o и f: $D \to P$ — тождественное отображение. Соответствующее векторное поле v имеет лишь один нуль в центре круга D. Но заключение теоремы здесь не верно: для каждой точки $x \in C$ вектор vx направлен по внешней нормали к C. Хорошей иллюстрацией теоремы служит постоянное поле (рис. 31.1); угол α принимает каждое значение точно один раз.

Достаточно доказать лишь последнее утверждение теоремы 31.2, так как из него следуют остальные; при $\alpha=0°$ получаем внешнюю нормаль, при $\alpha=180°$ — внутреннюю нормаль и при $\alpha=90°$ и $\alpha=270°$ — касательные.

Итак, докажем последнее утверждение. Пусть α — заданный угол. Выберем начало o в центре круга D и рассмотрим отображение f: $D \to P$, соответствующее полю v. Пусть g — вращение плоскости P вокруг точки o на угол $-\alpha$ и h — радиальная проекция из точки o на окружность C. Так как поле v состоит из ненулевых векторов, образы fD и gfD не содержат точки o. Поэтому определено отображение hgf: $D \to C$. Поскольку $C \subset D$, его можно рассматривать как отображение $D \to D$. Теорема 28.1 утверждает, что отображение hgf оставляет неподвижной хотя бы одну точку, т. е. найдется такая точка $x \in C$, что $hgfx=x$. Пусть $v'x$ — вектор, соответствующий точке x при отображении hgf. По определению он параллелен вектору, идущему от o до $hgfx=x$. Следовательно, он направлен по внешней нормали в точке x. Но как отличаются векторы vy и $v'y$ для любой точки $y \in D$? Поскольку, чтобы получить hgf, нужно к f применить сначала g, а затем h, то, чтобы получить из вектора vy вектор $v'y$, нужно сначала повернуть vy на угол $-\alpha$, а затем изменить его длину так, чтобы она стала равной радиусу окружности C. Таким образом, для неподвижной точки $x \in C$ вектор vx должен составлять угол α с вектором $v'x$, который, как было показано, направлен по внешней нормали.

Следствие. *Если v — непрерывное векторное поле на круге D и если на окружности C поле v нигде не является касательным (нигде не является нормальным) к C, то поле v имеет в D по крайней мере один нуль.*

Предыдущие результаты играют важную роль при изучении установившихся течений жидкости. Нуль поля скоростей достигается лишь в точке, которая все время остается неподвижной. Допустим, что поле скоростей на некотором круге таково, что на его границе C все скорости направлены по внутренней нормали. Ясно, что в каждой точке окружности C жидкость втекает внутрь D. Интуиция говорит нам, что жидкость где-то внутри D должна накапливаться. Так как поле нигде не является касательным к окружности C, то по предыдущему следствию найдется по крайней мере одна неподвижная точка, где может собираться жидкость.

Упражнения

1. Пусть D — круг с центром z. Для каждой точки $x \in D$ пусть vx — вектор постоянной длины s, направленный вдоль луча, идущего от z к x. Тогда для каждой точки x граничной окружности C вектор vx направлен по внешней нормали, и ни для одной точки окружности он не направлен по внутренней нормали или по касательной. Противоречит ли это заключениям второй теоремы этого параграфа?

2. Для каждого из следующих отображений круга $D \subset P$ в плоскость P найти индекс соответствующего векторного поля относительно граничной окружности C, точку $x \in D$, для которой vx — нулевой вектор, и точки $x \in C$, для которых вектор vx касателен к C, направлен по внешней нормали к C и направлен по внутренней нормали к C:
   a) f отображает все точки круга D в его центр z (и $o \neq z$);
   b) f — тождественное отображение, и o есть центр z;
   c) f — тождественное отображение, и o находится на расстоянии $r/2$ от z;
   d) f — тождественное отображение и $d(o, z) > r$;
   e) f — вращение вокруг центра на 180° и o лежит вне D;
   f) f — параллельный перенос на заданный вектор, и o лежит вне fD;
   g) f — отражение относительно выбранного диаметра, и o совпадает с z.

§ 32. Отображения сферы в плоскость

Под сферой S мы будем понимать множество всех точек пространства, расстояние которых от точки z (центра) есть заданное положительное число r (радиус). Если $x \in S$, то *антиподом* x' точки x называется вторая точка, в которой прямая, проходящая через x и z, пересекает S, т. е. диаметрально противоположная точка.

Если мы отобразим сферу S в некоторую плоскость P с помощью ортогональной проекции f, то найдется пара антиподов x и x', для которых $fx = fx'$, именно точки пересечения сферы S с прямой, проходящей через z и перпендикулярной P. Как это ни удивительно, часть этого результата остается справедливой и для любого непрерывного отображения сферы S в плоскость P. Следующий аналог теоремы 10.1 был открыт математиками К. Борсуком и С. Уламом в 1933 г.

Теорема 32.1. *Каждое непрерывное отображение f: $S \to P$ сферы в плоскость переводит некоторую пару антиподов сферы S в одну и ту же точку. Иными словами, для по крайней мере одной пары x и x' антиподов имеет место равенство $fx = fx'$.*

Чтобы доказать теорему, выберем в качестве начала какую-либо точку o в плоскости P. Для каждой точки $x \in S$ обозначим через gx точку плоскости P, являющуюся концом вектора с началом в o, эквивалентного вектору, идущему от fx до fx', где x' — антипод точки x (рис. 32.1). Таким образом, g также есть отображение g: $S \to P$. Оно обладает тем свойством, что для каждой точки $x \in S$ образ gx' симметричен с образом gx относительно точки o. В самом деле, x и x' — антиподы, и, чтобы построить gx', нам нужно только перевернуть стрелку от fx к fx'. Теорема будет теперь доказана, если мы покажем, что g отображает некоторую точку сферы S в точку o, так как это возможно лишь в том случае, если некоторый вектор и вектор, противоположный ему, совпадают.

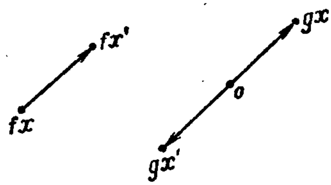


Рис. 32.1.

Будем считать известным, что отображеиие g непрерывно; это будет доказано позднее. Пусть P' — фиксироваииая плоскость, проходящая через центр z сферы S, C — окружность, по которой плоскость P' пересекает S, и D — круг в P', границей которого служит C. В случае когда образ gC содержит o, существует точка $x \in S$, для которой $gx = o$, и теорема доказана. Таким образом, нам нужно рассмотреть только случай, когда gC не содержит o. Пусть H — одна из полусфер, на которые сфера S разбивается плоскостью P', и ψ: $D \to H$ — отображение, обратное ортогональной проекции полусферы H на D. Тогда композиция $g\psi$: $D \to P$ совпадает с g на границе C. Пусть φ — стандартное представление окружности C как замкнутой кривой (§ 16). Достаточно доказать, что порядок $W(g\varphi, o)$ не равен нулю, потому что, как только это будет доказано, главная теорема (§ 18) обеспечит существование точки $y \in D$, для которой $g\psi y = o$, и тогда точка $x = \psi y$ сферы S будет удовлетворять условию $gx = o$.

Мы убедимся, что $W(g\varphi, o) \neq 0$, показав, что $W(g\varphi, o)$ есть нечетное целое число (напомним, что нуль — четное число, так как $2 \cdot 0 = 0$). Пусть φ_1 и

φ_2 — сужения функции φ на промежутках $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Пусть $x_0 = \varphi 0 = \varphi 1$; тогда ее антиподом будет точка $x_0' = \varphi \frac{1}{2}$. Кроме того, функция φ_1 представляет одну полуокружность окружности C как кривую от x_0 до x_0', а функция φ_2 представляет другую полуокружность как кривую от x_0' до x_0. Выберем теперь подразделение промежутка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, достаточно мелкое для кривой $g\varphi_1$ относительно точки o, и применим результат из § 22 для вычисления $A(g\varphi_1, o)$. Мы получим, что

$$A(g\varphi_1, o) = u - v + (r - s)360,$$

где $r - s$ есть целое число, а u и v — деления транспортира для лучей с вершиной o, проходящих соответственно через gx_0' и gx_0. Так как точки x_0 и x_0' антиподальны, точки gx_0', o и gx_0 лежат на одной и той же прямой; поэтому $u - v$ есть градусная мера развернутого угла, т. е. $u - v = \pm 180$. Отсюда следует, что $A(g\varphi_1, o)$ есть *нечетное* кратное числа 180:

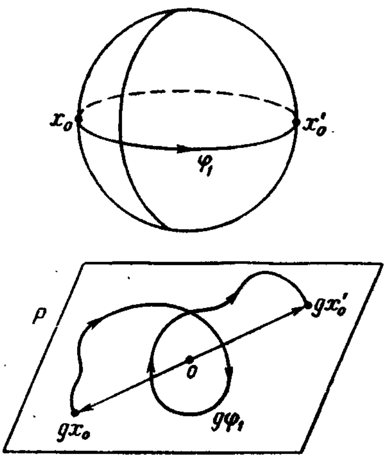


Рис. 32.2.

$$A(g\varphi_1, o) = (2m_1 + 1)\,180.$$

Рис. 32.2 иллюстрирует тот случай, когда множитель $2m_1 + 1$ равен —3.

Рассмотрим теперь кривую $g\varphi_2$, идущую от gx_0' обратно к gx_0. Пусть h: $P \to P$ — вращение плоскости вокруг точки o на угол в 180°. Если $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то

$\left(t+\frac{1}{2}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и точка $\varphi_2\left(t+\frac{1}{2}\right)$ антиподальна точке $\varphi_1 t$. Из симметрии отображения g поэтому следует, что

$$g\varphi_2\left(t+\frac{1}{2}\right) = hg\varphi_1 t \text{ для всех } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Иными словами, кривая $g\varphi_2$ получается при повороте кривой $g\varphi_1$ на 180° (рис. 32.2). Так как вращение сохраняет углы, $A(g\varphi_1, o) = A(g\varphi_2, o)$. Пользуясь аддитивностью A, получаем

$$A(g\varphi, o) = A(g\varphi_1, o) + A(g\varphi_2, o) = 2A(g\varphi_1, o) =$$
$$= 2(2m_1+1)180 = (2m_1+1)360;$$

следовательно,

$$W(g\varphi, o) = A(g\varphi, o)/360 = 2m_1+1.$$

Это завершает доказательство того, что порядок $W(g\varphi, o)$ нечетен.

Остается показать, что отображение g непрерывно. Пусть x_0 — произвольная точка сферы S, и N — окрестность точки gx_0 радиуса r. Пусть U и U' — соответственно окрестности точек fx_0 и fx'_0 радиуса $r/2$. Так как отображение f непрерывно, найдутся такие окрестности V и V' соответственно точек x_0 и x'_0, что $fV \subset U$ и $fV' \subset U'$. Множество T, состоящее из антиподов точек, принадлежащих V', является окрестностью точки x_0; пусть W — окрестность точки x_0, содержащаяся и в V, и в T. Тогда если $x \in W$, то $x \in V$ и $x' \in V'$, откуда следует, что $fx \in U$ и $fx' \in U'$. Обозначим через y точку в плоскости P, для которой вектор от fx_0 до y эквивалентен вектору от fx до fx' (рис. 32.3). Так как по определению вектор, идущий от o до gx, также эквивалентен вектору от fx до fx', а вектор от o до gx_0 эквивалентен вектору от fx_0 до fx'_0, то мы видим, что расстояние

$$d(gx, gx_0) = d(y, fx'_0).$$

По неравенству треугольника расстояние $d(y, fx'_0)$ в свою очередь меньше или равно

$$d(y, fx') + d(fx', fx'_0).$$

Из свойств параллелограмма следует, что $d(y, fx') = d(fx_0, fx)$; как это расстояние, так и $d(fx', fx'_0)$ меньше $r/2$, а потому их сумма меньше r. Отсюда следует, что $gx \in N$. Поэтому g отображает окрестность W в N. Тем самым доказана непрерывность отображения g и завершено доказательство теоремы.

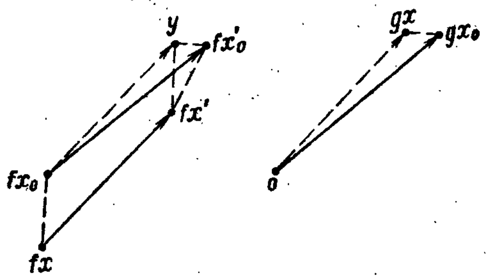


Рис. 32.3.

Вот одно приложение теоремы 32.1. Допустим, что поверхность земли есть сфера S и что в любой момент времени давление воздуха px и его температура tx являются функциями от $x \in S$. Зададим в плоскости P декартову систему координат, выбрав начало, две проходящие через него перпендикулярные оси и единицу масштаба. Для каждой точки $x \in S$ обозначим через fx точку плоскости P с координатами (px, tx). Так как p и t непрерывны, то и отображение f: $S \to P$ непрерывно. Применяя теперь к этому отображению нашу теорему, получаем

Следствие. *В каждый момент времени существует пара антиподальных точек земной поверхности, в которых давления и температуры совпадают.*

Конечно, физические свойства давления и температуры не имеют к нашему заключению никакого отношения; p и t могут быть любыми двумя непрерывными действительными функциями, определенными на S.

Заметим также, что если мы рассмотрим лишь одну функцию, например температуру, то по теореме 10.1 на каждом большом круге найдется пара антиподальных точек, в которых температуры равны.

Упражнения

1. Пусть S — сфера в пространстве R^3 радиуса r с центром z в начале системы координат (x_1, x_2, x_3). Пусть P — плоскость (x_1, x_2) и L — ось x_1. Найти пары антиподов, имеющих один и тот же образ при отображении $f: S \to P$, если f есть
   a) ортогональная проекция сферы S на L (все проектирующие лучи перпендикулярны L);
   b) композиция вращения сферы S на 90° вокруг L, за которым следует ортогональная проекция на P.
2. Показать, что заключение теоремы Борсука — Улама остается в силе, если «антиподы» определять не с помощью прямых, проходящих через центр сферы S, а с помощью прямых, проходящих через любую точку Q, лежащую внутри сферы.
3. Показать, что заключение теоремы останется справедливым, если сферу заменить эллипсоидом или поверхностью прямоугольного параллелепипеда, а антиподами называть точки, симметричные относительно центра.

§ 33. Разрезание сэндвича с ветчиной

Теорема этого параграфа является трехмерным аналогом теоремы 11.1, утверждающей, что любые две ограниченные связные области на плоскости можно одной прямой разделить на две равновеликие части.

Теорема 33.1. *Пусть A, B и C — три ограниченных, связных и открытых множества в пространстве. Тогда существует плоскость, которая каждую из этих областей делит на две равные по объему части.*

Иллюстрацией этой теоремы служат три шара и плоскость, проходящая через их центры. Сила теоремы заключается в том, что она применима и тогда, когда области имеют неправильную форму. Если под A и B мы будем понимать куски хлеба, а под C — лежащий между ними кусок ветчины, то теореме можно дать такое истолкование: одним взмахом ножа сэндвич с ветчиной можно разрезать на две части так, что оба куска хлеба и ветчина будут одновременно разделены точно пополам.

Чтобы доказать теорему, выберем сферу S, заключающую внутри себя области A, B и C. Такая сфера существует, потому что области A, B и C ограничены. Пусть z — центр сферы S и r — ее радиус. Для каждой точки $x \in S$ обозначим через L_x диаметральную прямую, проходящую через z и x. Мы покажем, что

(1) для каждой точки $x \in S$ существует единственная точка $x_A \in L_x$, для которой плоскость, перпендикулярная прямой L_x в точке x_A, делит A на две равные по объему части.

Когда это будет сделано, мы обозначим через $g_A x$ расстояние $d(z, x_A)$, взятое со знаком плюс, если точка x_A лежит на отрезке, соединяющем z и x, и со знаком минус, если точка x_A лежит на отрезке, соединяющем центр z с антиподом x' точки x. Так как прямые L_x и $L_{x'}$ совпадают, но направления на них противоположны, и так как $x'_A = x_A$, то отсюда следует, что $g_A x' = -g_A x$.

Точно таким же образом определим для множеств B и C соответственно x_B, $g_B x$ и x_C, $g_C x$. Теперь рассмотрим отображение $f\colon S \to R^2$, ставящее каждой точке $x \in S$ в соответствие точку с координатами

$$fx = (g_A x - g_B x,\ g_A x - g_C x).$$

Мы покажем, что

(2) отображение f непрерывно.

Как только утверждения (1) и (2) будут доказаны, доказательство теоремы 33.1 будет очень быстро завершено следующим образом. По теореме 32.1 существует точка x, для которой $fx = fx'$. Приравнивая координаты точек fx и fx', получаем

$$g_A x - g_B x = g_A x' - g_B x',$$
$$g_A x - g_C x = g_A x' - g_C x'.$$

С помощью отмеченных выше соотношений $g_A x' = -g_A x$, $g_B x' = -g_B x$ и $g_C x' = -g_C x$ первое из равенств приводим к виду $g_A x = g_B x$, а второе — к виду $g_A x = g_C x$. Поэтому для любой точки $x \in S$, образ которой совпадает с образом ее антипода, имеем $x_A = x_B = x_C$, и плоскость, перпендикулярная прямой L_x и проходящая через эту точку x_A, делит все три области на две равные по объему части.

Чтобы доказать (1), обозначим для каждой точки $y \in L_x$ через P_y плоскость, проходящую через y и перпендикулярную L_x, и через hy объем той части области A, которая лежит по ту же сторону от плоскости P_y, что и x. Когда точка y перемещается от x' до x, значение hy меняется от объема области A до нуля. Если точки y_1 и y_2 принадлежат L_x, то абсолютная величина $|hy_1 - hy_2|$ не превосходит объема части шара, заключенной между плоскостями P_{y_1} и P_{y_2} а этот объем меньше, чем $\pi r^2 |y_1 - y_2|$. Тем самым показано, что функция h непрерывна в каждой точке $y \in L_x$ (для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon / \pi r^2$). Поэтому главная теорема части I гарантирует существование точки y, для которой объем hy составляет половину объема области A. Если бы таких точек было две, то нашлись бы две параллельные плоскости P_1 и P_2, делящие область A пополам. Слой Q, состоящий из всех точек простраиства, лежащих между плоскостями P_1 и P_2, разбивает свое дополнение на две непересекающиеся части. Так как область A связна и в каждой из этих частей имеет половину своего объема, она должна содержать точку q внутри Q. Множества A и Q открыты, поэтому найдется окрестность U точки q, содержащаяся в $A \cap Q$. Поскольку объем шара U положителен, положителен и объем пересечения $A \cap Q$. Перемещение точки y от P_1 до P_2 изменяет hy на объем пересечения $A \cap Q$. Таким образом, обе плоскости P_1 и P_2 не могут одновременно делить область A на две равные по объему части. Утверждение (1) доказано.

Чтобы доказать (2), т. е. непрерывность отображения f, достаточно показать, что непрерывна каждая координата f. Мы докажем только, что непрерывна функция g_A, а остальное предоставим читателю. Пусть c — произвольная точка сферы S, и c_A — точка на прямой L_c, в которой плоскость P_c, перпендикулярная L_c и делящая область A пополам, пересекает L_c. Пусть x — точка на S, близкая к c, и x_A и P_x определены

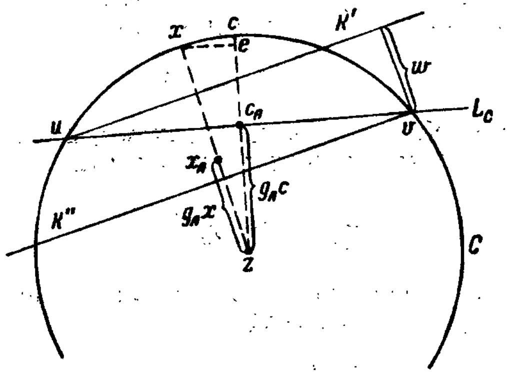


Рис. 33.1.

аналогично. На рис. 33.1 изображено пересечение рассматриваемой конфигурации с плоскостью, проходящей через c, x и z. Мы хотим показать, что абсолютную величину $|g_A x - g_A c|$ можно сделать сколь угодно малой (меньшей, чем заданное $\varepsilon > 0$), если точку x взять достаточно близко к c (в некоторой окрестности $N(c, \delta)$).

Пусть u и v — точки, в которых большой круг, проходящий через c и x, пересекает плоскость P_c. Пусть P' и P'' — плоскости, перпендикулярные к L_x, проходящие соответственно через u и v. Обозначим буквой N внутренность шара, ограниченного сферой S. Часть шара N, лежащая по ту же сторону от плоскости P', что и c, входит в часть шара N, лежащую по ту же сторону, что и c, от плоскости P_c. Так как $A \subset N$, то часть области A, лежащая по ту же сторону, что и c, от плоскости P', входит в часть области A, лежащую по ту же сторону, что и c, от плоскости P_c. Поэтому, если V — объем области A, то объем части области A, лежащей по ту же сторону, что и c, от плоскости P', не превосходит $V/2$. В силу точно такого же рассуждения объем части области A, лежащей по другую сторону от плоскости P'', чем c, не превосходит $V/2$. Отсюда следует, что плоскость P_x должна лежать между P' и P''. Поэтому для расстояния w между плоскостями P' и P'' мы имеем

$$|g_A x - g_A c| < w.$$

Оценку величины w мы получим, заметив, что из подобия двух треугольников следует

$$\frac{w}{d(u, v)} = \frac{d(e, x)}{d(z, x)},$$

где e — ортогональная проекция точки x на L_c. Поскольку $d(z, x) = r$, находим

$$w = \frac{d(u, v)}{r} d(e, x).$$

Так как $d(u, v) \leqslant 2r$ и $d(e, x) \leqslant d(c, x)$, получаем

$$w \leqslant 2d(c, x).$$

Следовательно,

$$|g_A x - g_A c| < 2d(c, x).$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon/2$; тогда из $x \in N(c, \delta)$ будет следовать, что $|g_A x - g_A c| < \varepsilon$. Это показывает, что функция g_A непрерывна в точке c. Поскольку это верно для каждой точки $c \in S$, то функция g_A непрерывна на S, и теорема 33.1 полностью доказана.

Упражнения

1. Пусть A — шар, B — куб и C — цилиндр. Указать плоскость, разрезающую все эти три области на две равные по объему части.
2. Провести прямое доказательство теоремы в случае, когда A — шар, B — полушар, ось которого проходит через центр шара A, и C — любое третье тело.

§ 34. Векторные поля, касательные к сфере

Пусть v — векторное поле, определенное на сфере S в пространстве (§ 29). Каждой точке $x \in S$ оно ставит в соответствие ориентированный прямолинейный отрезок, начинающийся в x. Мы будем говорить, что поле v *касательно* к сфере S, если для каждой точки $x \in S$ соответствующий прямолинейный отрезок касателен к S, или, что то же самое, перпендикулярен радиусу zx, где z — центр сферы S. Как и в § 30, векторному полю v мы поставим в соответствие некоторое отображение g сферы S в пространство, выбрав какое-либо начало o и взяв в качестве gx конец вектора с точкой приложения o, который параллелен и равен по длине вектору vx. Векторное поле v мы называем *непрерывным*, если непрерывно соответствующее отображение g.

Теорема 34.1. *Пусть v — непрерывное векторное поле, определенное на сфере S и касательное к S. Тогда найдется хотя бы одна точка $x \in S$, для которой $vx = 0$.*

Векторное поле, касательное к сфере S, можно интерпретировать как поле скоростей. Из теоремы тогда следует, что установившееся течение на сферической поверхности имеет хотя бы одну стационарную точку. Поясним это на примере: предположим, что поверхность земли есть сфера и что вектор скорости ветра непрерывен. Тогда в любой момент времени на земле найдется место, в котором ветра нет.

Если мы будем вращать сферу с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси, то мы получим поле, имеющее две стационарные точки.

Чтобы проиллюстрировать теорему, построим поле, касательное к S, имеющее ровно один нуль в данной точке x_0. Пусть L — ориентированная касательная прямая к сфере S в точке x_0. Для любой точки $x \in S$, отличной от x_0, точка x и прямая L определяют плоскость P_x, пересекающую S по окружности C_x. Придадим окружности C_x ту же ориентацию, которую имеет прямая L. Пусть vx — вектор в плоскости P_x с точкой приложения x, касательный к C_x, длина которого равна половине расстояния $d(x, x_0)$, а направление согласуется с ориентацией C_x. На рис. 34.1 изображены несколько векторов, касательных к C_x в плоскости P_x; прямую L мы направили вверх, и потому окружность C_x ориентирована против часовой стрелки. Заметим, что по мере того, как точка x приближается к x_0, векторы становятся все короче и короче. Дополнив определение поля v условием $vx_0=0$, получаем непрерывное поле.

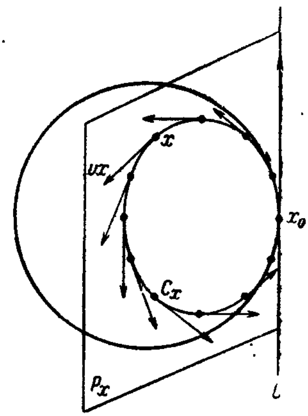


Рис. 34.1.

В отличие от сферы поверхность тора (автомобильная камера) допускает непрерывное касательное векторное поле, нигде не равное нулю. Например, представьте себе поле скоростей камеры, вращающейся вокруг своей оси, или же колечко дыма.

Доказательство. Выберем фиксированную плоскость P, проходящую через центр z сферы S. Пусть C — окружность $P \cap S$ и D — круг, который она ограничивает в плоскости P. Обозначим через H и H' две замкнутые полусферы сферы S, ограниченные окружностью C. Пусть p и p' — полюсы, в которых прямая, перпендикулярная плоскости P в точке z, пересекает соответственно H и H'. Пусть h: $H' \to D$ — гомеоморфизм, задаваемый стереографической проекцией из полюса p. Точнее, если $x \in H'$, то hx есть пересечение круга D с прямолинейным отрезком, соединяющим p с x. Аналогично, пусть h': $H \to D$ — гомеоморфизм, задаваемый стереографической проекцией из полюса p'.

Достаточно доказать, что если поле v не имеет нулевого вектора на одной из полусфер, скажем H', то оно должно иметь нулевой вектор на H. В качестве первого главного шага мы докажем такое утверждение:

1. С помощью стереографической проекции h можно определить отображенне поля v на H' в поле w' на круге D так, что векторы в соответствующих точках будут иметь одну и ту же длину, и такое же отображение поля v на H в некоторое поле w на D.

Как только это будет доказано, из того факта, что поле v не имеет нулевых векторов на H' будет следовать, что поле w' не имеет нулевых векторов на D, и, значит, по теореме 31.1 [1]) индекс $I(w', C)=0$. Затем в качестве второго главного шага мы докажем следующее предложение:

2. Векторы wx и $w'x$ в точке x окружности C получаются поворотом вектора vx вокруг касательной к окружности C на 90°, но в противоположных направлениях. Тот факт, что $I(w', C)=0$, влечет за собой, что $I(w, C)=2$.

Как только это будет доказано, применяя теорему 31.1 и условие $I(w, C)\neq 0$, мы заключим, что поле w имеет нулевой вектор в некоторой точке круга D; поэтому поле v имеет нулевой вектор в соответствующей точке полусферы H. Таким образом, остается доказать утверждения 1 и 2.

Для каждой точки $x\in S$ пусть T_x — плоскость, касательная к сфере S в точке x. Для точек $x\in H'$ определим отображение h_x: $T_x\to P$, проектируя плоскость T_x на плоскость P параллельно прямой, проходящей через p и x. Точнее, если $q\in T_x$, то $h_x(q)$ есть точка пересечения плоскости P с прямой, проходящей через q и параллельной прямой px (рис. 34.2). Проверка того, что плоскости T_x и P образуют равные углы с прямой px — простое упражнеиие по элементарной геометрии. Следовательно, отображение h_x является изометрией (т. е. сохраняет расстояния). Определим векторное поле w' на круге D, полагая,

---

[1]) Непрерывиость полей w и w' на круге D следует из их определения, данного ииже. — *Прим. перев.*

что вектор $w'y$ с точкой приложения $y \in D$ есть образ в плоскости P при отображении h_x вектора vx, лежащего в T_x, где x — точка из H', для которой $hx=y$. Так как h_x — изометрия, то векторы $w'y$ и vx имеют одну и ту же длину. Точно так же для точек $x \in H$ пусть $h'_x: T_x \to P$ есть проектирование параллельно прямой $p'x$, и пусть wy есть образ вектора vx при отображении h'_x, где $y=h'x$. Тем самым поля w и w' на D определены, и утверждение 1 доказано.

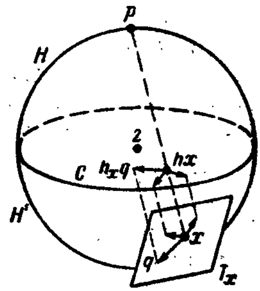


Рис. 34.2.

Если $x \in C$, то мы имеем $hx=x$ и $h'x=x$. Кроме того каждая из плоскостей T_x и P образует с прямой px угол в 45°. Таким образом, отображение h_x плоскости T_x в P можно рассматривать как результат поворота плоскости T_x на угол 90° вокруг прямой L_x, касательной к окружности C в точке x. Точно так же и отображение h'_x есть результат поворота плоскости T_x вокруг L_x на 90°, но в противоположном направлении. Следовательно, вектор wx получается из вектора $w'x$ при отражении плоскости P относительно касательной L_x к окружности C в точке x.

Как было показано в § 30, полю w' на круге D соответствует отображение $f: D \to P$. Так как поле w' не имеет нулевых векторов, образ fD не содержит начала. Рассматривая композицию отображения f со стандартным стягиванием окружности C по кругу D в центр этого круга, получаем гомотопию замкнутой кривой $f|C$ в постоянное отображение (см. § 25). На каждом шаге этой гомотопии, т. е. при любом значении $\tau \in [0, 1]$ можно вернуться к соответствующему векторному полю w'_τ на C, все векторы которого лежат в плоскости P. Когда τ меняется от 0 до 1, мы получаем движущееся векторное поле на C. Иными словами, для фиксированной точки $x \in C$, когда τ меняется от 0 до 1, вектор $w'_\tau x$ поворачивается вокруг x.

При $\tau=0$ поле w'_0 совпадает с w', а при $\tau=1$ поле w'_1 постоянно (все векторы параллельны и имеют одну и ту же длину). Так как образ fD не содержит начала, то ни один из векторов $w'_\tau x$ не является нулевым.

Пусть $w_\tau x$ — вектор, получающийся из $w'_\tau x$ при отражении плоскости P относительно прямой L_x. Тогда w_τ для каждого τ является векторным полем на C, векторы которого лежат в P, а когда τ меняется от 0 до 1, мы получаем гомотопию поля $w=w_0$ в поле w_1. Так как вектор $w_\tau x$ ни для одной точки $x \in C$ не равен нулю, то поля w и w_1 имеют относительно C один и тот же индекс. Индекс $I(w_1, C)$ легко подсчитать, рассмотрев рис. 34.3. Постоянное поле w'_1 на C изображено сплошными, а поле w_1 — пунктирными векторами. В каждой точке $x \in C$ пунктирный вектор $w_1 x$ получается путем отражения сплошного вектора $w'_1 x$ относительно касательной L_x. Допустим, что мы начинаем движение с верхней точки окружности C на рис. 34.3 и один раз обходим эту окружность против часовой стрелки. В начальной точке вектор $w_1 x = w'_1 x$ направлен вправо. К моменту, когда мы пройдем четверть окружности, вектор $w_1 x$ повернется на 180° против часовой стрелки и будет направлен влево. Если мы будем двигаться дальше по окружности C, вектор будет продолжать поворачиваться с постоянной скоростью. Следовательно, когда мы один раз обойдем окружность, вектор $w_1 x$ повернется на 720° против часовой стрелки. Таким образом, $I(w_1, C)=2$. Так как $I(w, C)=I(w_1, C)$, то и $I(w, C)=2$. Это завершает доказательство теоремы.

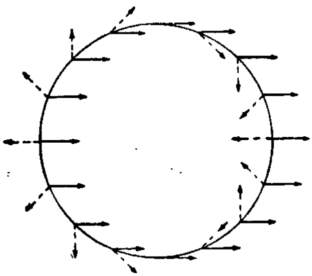


Рис. 34.3.

Упражнения

1. Показать, что непрерывное поле ненулевых векторов, определенное на сфере (при этом не предполагается, что оно каса-

тельное), должно иметь хотя бы один вектор, перпендикулярный к сфере.

2. Показать, что теорема останется справедливой, если сферу заменить эллипсоидом (или любой гладкой поверхностью яйцевидной формы).

§ 35. Комплексные числа

Хорошо известно, что некоторые многочлены с действительными коэффициентами, например многочлен x^4+x^2+1, не имеют действительных нулей. Простейший из таких многочленов, x^2+1, натолкнул на мысль ввести чисто мнимое число $\sqrt{-1}$, обозначаемое буквой i. Затем было установлено, что нули других многочленов могут быть выражены в виде $a+ib$, где a и b — действительные числа. Например, многочлен x^4+x^2+1 имеет нули

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

что можно проверить непосредственной подстановкой.

Это расширение системы чисел нужно сравнить с различными расширениями, обсуждавшимися в § 5. Оно необходимо по той же причине: системы действительных чисел не хватает для решения алгебраических уравнений. Здесь сразу возникают два вопроса. Насколько большим должен быть класс чисел, чтобы каждый многочлен имел в нем хотя бы один нуль? Как новые числа изображать геометрически? В следующем параграфе мы покажем, что множество комплексных чисел достаточно велико. В этом параграфе мы опишем основные свойства комплексных чисел и укажем их геометрическую интерпретацию.

Точно так же, как действительные числа можно изображать точками на прямой, комплексные числа можно изображать точками на плоскости. Комплексное число $x+iy$ есть пара (x, y) действительных чисел. Если выбрать в плоскости P начало координат, две перпендикулярные оси координат и единицу масштаба, то, как показано на рис. 35.1, эту пару (x, y) можно представить точкой с координатами (x, y). Комплексные числа, у которых $y=0$ (т. е. числа вида x или $(x, 0)$), называются *действительными* *числами*. Они изображаются точками оси x. Числа, у которых $x=0$ (т. е. числа вида iy или $(0, y)$), называются *чисто мнимыми*. Они лежат на оси y. Для любого комплексного числа $x+iy$ его ортогональными проекциями на оси координат служат числа x и iy. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* числа $x+iy$.

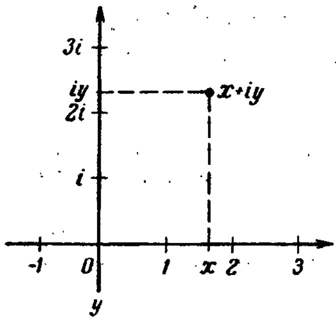


Рис. 35.1.

Для того чтобы комплексные числа образовывали систему чисел, нужно определить для них операции сложения и умножения. При сложении комплексных чисел складывают по отдельности их действительные и мнимые части

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

или, эквивалентно,

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Геометрически сложение комплексных чисел изображается как *сложение векторов*, причем каждое комплексное число (x, y) изображается вектором, идущим из начала координат в точку (x, y). Сумма двух векторов есть диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых (рис. 35.2).

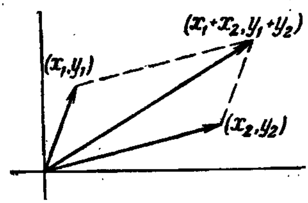


Рис. 35.2.

Умножение более сложно. В координатах оно описывается следующим правилом:

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

Например,

$$(2, -3)\cdot\left(-\frac{1}{2}, 5\right)=\left(14, \frac{23}{2}\right).$$

Это правило можно вывести, предполагая, что для комплексных чисел должны выполняться распределительный, сочетательный и переместительный законы и, кроме того, закон $i^2=-1$. Тогда

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1iy_2+iy_1x_2+iy_1iy_2=$$
$$=x_1x_2+i^2y_1y_2+ix_1y_2+ix_2y_1=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Геометрическую интерпретацию умножения можно получить, если рассмотреть углы, образованные векторами, и длины этих векторов. Все углы с вершиной в начале координат измеряются от положительного направления оси x. Тогда любой вектор с точкой приложения в начале координат определяется парой чисел $[r, \theta]$, где θ — угол в градусах, составляемый вектором с осью x, а r — длина вектора. Угол θ называется *аргументом* соответствующего комплексного числа, а r — *модулем* этого числа. При умножении двух комплексных чисел их аргументы складываются, а модули умножаются (рис. 35.3). Например, $i=[1, 90°]$; поэтому $i^2=[1, 180°]=(-1, 0)=-1$. Вывод этого геометрического правила из правила алгебраического является упражнением по тригонометрии. В алгебраическое правило нужно подставить $x_1=r_1\cos\theta_1$, $y_1=$ $=r_1\sin\theta_1$ и т. д. и затем воспользоваться формулами сложения для синуса и косинуса.

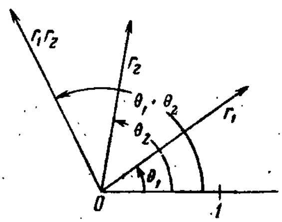


Рис. 35.3.

Чтобы оправдать эти определения, нужно проделать большую работу. Прежде всего нужно проверить, что для чисел, лежащих на оси x, сложение и умножение совпадают со сложением и умножением действительных чисел. Это означает, что комплексные числа образуют расширение системы действительных чисел. Затем нужно доказать, что для комплексных чисел сохраняются все алгебраические законы действий над действительными числами, например сочетательный и переместительный законы для сложения и умножения и распределительный закон. Действительное число $1=(1, 0)$ служит единицей для комплексных чисел, т. е. $(1, 0)\cdot(x, y)=(x, y)$. Число $0=(0, 0)$ является нулем для сложения и умножения:

$$(0, 0)+(x, y)=(x, y), \quad (0, 0)\cdot(x, y)=(0, 0).$$

Наконец, нужно доказать, что сложенне и умножение — непрерывные операции.

Число (x, y) обычно сокращенно обозначают буквой z, так что $z=x+iy$. Очевидно, $z^2=z\cdot z=(x^2-y^2, 2xy)$. Степень z^n для всех целых $n\geqslant 1$ определим с помощью индуктивного правила $z^n=z\cdot z^{n-1}$. Тогда функция $fz=z^n$ определяет отображение $P\to P$ множества всех комплексных чисел в себя. При $n=1$ f есть тождественное отображение. Для $n=2$ при отображении f аргументы всех чисел удваиваются, а модули возводятся в квадрат. Каждый луч с вершиной в начале координат 0 отображается на луч, образующий с положительным направлением оси x вдвое большнй угол. Окружность радиуса r с центром 0 отображается на окружность радиуса r^2 и дважды наворачивается на себя. Полезно представлять себе плоскость P как *веер* из лучей с вершиной в 0. Тогда функция z^2 дважды наворачивает этот веер на себя.

Аналогично при отображении $fz=z^n$ все аргументы умножаются на n, а все модули возводятся в n-ю степень. Окружность радиуса r с центром в 0 наворачивается n раз на окружиость радиуса r^n с центром 0. Таким образом, если C — любая окружиость с цеитром 0, то порядок $W(f|C, 0)$ для этой функции $fz=z^n$ равен n.

Многочлен f степени n определяется в точности так же, как для действительных чисел. Он является функцией, задаваемой формулой

$$fz=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные комплексные числа и $a_n\neq 0$. (Не будем забывать, что каждое действительное число является и комплексным числом и некоторые из коэффициентов или даже все они могут быть действительными.) Как функция многочлен f определяет некоторое отображение $f: P \to P$. Его непрерывность можно доказать, пользуясь непрерывностью сложения и умножения комплексных чисел.

Упражнение

1. Опишите геометрически отображение f: $P \to P$, задаваемое каждой из следующих формул:

a) $fz = z - 4$,	b) $fz = z + 2i$,
c) $fz = z + (1 - i)$,	d) $fz = 2z$,
e) $fz = -z$,	f) $fz = iz$,
g) $fz = (i + 1) z$,	h) $fz = (i + 1) z - 3i$,
i) $fz = iz^2 + 2i + 2$,	j) $fz = 1/z \quad (z \neq 0)$.

§ 36. Каждый многочлен имеет нуль

Теорема 36.1. *Пусть $n \geqslant 1$ — целое число, и f — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Тогда f имеет хотя бы один нуль, т. е. существует такое комплексное число α, что $f(\alpha) = 0$.*

Так как коэффициент при z^n в многочлене f не равен нулю, мы можем разделить на него и получить $f/a = g$ или $f = ag$, где многочлен g имеет старший коэффициент 1:

$$g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Поскольку нуль многочлена g будет и нулем многочлена f, нам нужно только доказать, что многочлен g имеет нуль. Мы сделаем это, показав, что существует такая окружность C, образ которой при отображении g: $P \to P$ имеет относительно точки нуль порядок n, т. е. $W(g|C, 0) = n$. Так как $n \neq 0$, то из главной теоремы части II будет следовать, что внутри C найдется точка α, для которой $g\alpha = 0$.

Модуль комплексного числа z, т. е. расстояние его от точки 0, обозначается символом $|z|$. Центром окружности C является 0, а ее радиусом r служит любое положительное число, большее, чем максимум r_0 действительных чисел

$$n|a_1|, \ (n|a_2|)^{1/2}, \ \ldots, \ (n|a_n|)^{1/n}.$$

Прямое вычисление порядка $W(g|C,\ 0)$ слишком трудно, и потому мы построим гомотопию отображения $g|C$ в более простое отображение, задаваемое многочленом z^n. В § 35 мы видели, что $W(z^n|C, 0)=n$. Таким образом, если мы сумеем показать, что точка 0 не принадлежит образу при этой гомотопии, то из постоянства порядка кривой будет следовать, что $W(g|C,\ 0)=n$.

Гомотопию кривой $g|C$ определим формулой

$$g(z,\ \tau)=z^n[1+(1-\tau)h(z)],\quad z\in C,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

где

$$h(z)=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}.$$

При $\tau=1$ отображение $g(z,\ \tau)$ сводится к z^n, а при $\tau=0$ находим, что $g(z,\ 0)=gz$. Остается показать, что точка 0 не принадлежит образу при этой гомотопии, т. е. что $g(z,\ \tau)\neq 0$ для всех $z\in C$ и всех $\tau\in[0,\ 1]$.

Условие $z\in C$ означает, что $|z|=r$. Так как $r>(n|a_k|)^{1/k}$ при каждом $k=0, \ldots, n-1$, то $r^k>n|a_k|$ и, значит, для всех $z\in C$

$$\frac{|a_k|}{|z^k|}=\frac{|a_k|}{r^k}<\frac{1}{n}.$$

Так как $h(z)$ имеет n членов, каждый из которых по модулю на окружности C меньше, чем $1/n$, то на C выполняется неравенство $|h(z)|<1$. Учитывая еще, что $|1-\tau|\leqslant 1$, находим $|(1-\tau)h(z)|<1$. Сумма единицы и комплексного числа, по модулю меньшего единицы, не может быть равна нулю. Следовательно, для всех $z\in C$ и $\tau\in[0,\ 1]$ сумма $1+(1-\tau)h(z)$ не обращается в нуль. Так как функция z^n при $z\in C$ также не равна нулю, то отсюда следует, что произведение $z^n[1+(1-\tau)h(z)]=g(z,\ \tau)$ не равно нулю. Это завершает доказательство.

Человека, занимающегося алгеброй, не удовлетворило бы утверждение, что всякий многочлен степени >1 имеет только один нуль. Полный результат дает следующая теорема.

Теорема 36.2. *Пусть f — многочлен степени n с (действительными или) комплексными коэффициентами. Тогда существует n таких комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что многочлен f разлагается в произведение n линейных множителей*

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n).$$

Если положить $z=\alpha_i$, то i-й множитель обратится в нуль; поэтому каждое число α_i является нулем многочлена f. Если положить $z=\alpha$, где α — число, отличное от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то каждый множитель будет отличен от нуля; поэтому $f(\alpha)\neq 0$. Это показывает, что нулями многочлена f являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и только они. В случае когда какое-либо число встречается среди них два раза или больше, оно называется кратным нулем, или кратным корнем, а число множителей, в которые оно входит, называется его кратностью.

Для доказательства теоремы нам нужна следующая

Лемма[1]. *Если f — многочлен степени n и α — любое комплексное число, то существует такой многочлен g степени $n-1$, что $f(z)=(z-\alpha)g(z)+f(\alpha)$.*

Для доказательства леммы по известным правилам разделим многочлен f на двучлен $z-\alpha$. Пусть g — частное и r — остаток, так что

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = g(z) + \frac{r}{z-\alpha}.$$

Умножая на $z-\alpha$, получаем

$$f(z) = (z-\alpha)g(z) + r.$$

Чтобы найти r, положим здесь $z=\alpha$, откуда $f(\alpha)=r$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 36.2. В силу теоремы 36.1 многочлен f имеет хотя бы один

[1]) Эта лемма обычно называется теоремой Безу. — *Прим. перев.*

нуль, скажем α_1. Так как $f(\alpha_1)=0$, то по лемме существует такой многочлен g степени $n-1$, что

$$f(z)=(z-\alpha_1)g(z)+f(\alpha_1)=(z-\alpha_1)g(z).$$

Остаток пропадает, поскольку $f(\alpha_1)=0$. Если $n-1\geqslant 1$, то, применяя теорему 36.1, мы можем получить нуль α_2 многочлена g. Тогда по лемме найдется многочлен h степени $n-2$, такой, что

$$g(z)=(z-\alpha_2)h(z).$$

Подставляя $g(z)$ в предыдущее равенство, находим

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)h(z).$$

Если $n\geqslant 3$, то существует нуль α_3 многочлена h и $h(z)=(z-\alpha_3)k(z)$; поэтому

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)k(z).$$

Каждый шаг понижает степень последнего множителя на единицу. После n шагов последний множитель будет иметь степень 0; значит, он будет некоторым числом c и

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)c.$$

Если в правой части раскрыть все скобки, то легко убедиться, что коэффициент при z^n равен c. Следовательно, $c=a_n$, и теорема доказана.

Историческая справка. Теорему 36.1 часто называют основной теоремой алгебры. Первое ее строгое доказательство было дано в 1797 г. Гауссом. В последние годы было получено несколько совершенно других доказательств, но ни одно из них не похоже на доказательство, изложенное выше. Прямое и довольно простое доказательство в классическом духе можно найти в книге: Ford and Ford[1]), Calculus, McGraw-Hill, 1963, p. 263.

[1]) См. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, М., 1959, стр. 147. — *Прим. перев.*

Упражнения

1. Показать, что если r_0 определено, как в доказательстве теоремы 36.1, и E — множество всех чисел z, у которых $|z|>r_0$, то многочлен f не имеет нулей в множестве E.
2. Подсчитать число r_0 для каждого из следующих многочленов и тем самым найти круг с центром в точке 0, содержащей *все* нули соответствующего многочлена:
   a) z^4+3z^3-2z+5,
   b) $2z^7+iz^3-3z$,
   c) $z^4+(2-i)z^3+(i+1)z$.
3. Пусть $fz=(z-2)(z+1)(z-i)4$. Найти все коэффициенты этого многочлена, подсчитать, как и выше, число r_0 и удостовериться, что круг радиуса r_0 содержит все нули многочлена f.
4. Найти нули каждого из следующих квадратных трехчленов и проверить, что все нули лежат в круге радиуса r_0:
   a) $3z^2-13z-10$,
   b) $3z^2-2z+1$.
5. Показать, что в доказательстве теоремы 36.1 достаточно выбрать r так, чтобы сумма

$$\frac{|a_1|}{r}+\frac{|a_2|}{r^2}+\ldots+\frac{|a_n|}{r^n}<1.$$

Пользуясь этим фактом, показать, что все нули многочлена z^3-z+5 лежат внутри окружности $|z|=2$.

§ 37. Эпилог: несколько слов о случае более высоких размерностей

При переходе от одномерного случая к двумерному мы встретились с серьезными трудностями, которые нам удалось преодолеть лишь после того, как было введено новое понятие — порядок $W(\varphi, y)$ замкнутой кривой φ относительно точки y. Можно ожидать, что при переходе к трехмерному случаю и к случаям еще более высоких размерностей появятся новые трудности. И они действительно появляются, но многое из того, что мы сделали в двумерном случае, приемлемо с небольшими изменениями и здесь. Стоит сделать краткий обзор того, что известно об этой задаче, потому что ей посвящены некоторые из самых лучших современных математических исследований.

Переходя от плоскости P к n-мерному евклидову пространству R^n, естественно заменить круг и его граничную окружность шаром B и ограничивающей его сферой S. Пусть $f\colon B \to R^n$ — непрерывное отображение, и y — точка пространства R^n, не принадлежащая образу fS. Тогда главная теорема утверждает: если $W(f|S, y) \neq 0$, то существует хотя бы одна такая точка $x \in B$, что $fx = y$. Основная задача состоит в таком определении порядка $W(f|S, y)$, чтобы он обладал всеми свойствами порядка кривой относительно точки для $n=2$. При $n=3$ порядок $W(f|S, y)$ правильнее было бы называть числом *окутываний*[1]). Например, сфера S окутывает каждую внутреннюю точку шара B ровно один раз. Эта работа была проделана: порядок $W(f|S, y)$ был точно определен для всех размерностей n и было показано, что он обладает теми же свойствами, какими он обладал при $n=2$. Например, он не меняется при гомотопии, не задевающей точку y.

После того как главная теорема доказана, приложения, рассмотренные для $n=2$ в § 27—36, можно сформулировать и доказать для всех размерностей с несущественными изменениями в обозначениях и терминологии. Сформулируем некоторые из них. Так как сфера S имеет порядок 1 относительно каждой внутренней точки шара B, любое непрерывное отображение $f\colon B \to R^n$, оставляющее неподвижными все точки сферы S, обладает тем свойством, что $fB \supset B$. Далее любое непрерывное отображение $B \to B$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, а если сфера S в R^n непрерывно отображается в пространство R^{n-1}, то некоторая пара антиподов имеет один и тот же образ.

Теорема о поле касательных векторов к сфере S в R^n должна быть изменена. Если n четно, то сфера S имеет непрерывное поле ненулевых касательных векторов (например, S есть окружность при $n=2$). Если же n нечетно, то любое непрерывное поле касательных векторов к S имеет хотя бы один нуль.

Перескочив к n-мерному случаю, мы прошли мимо двух вопросов, заслуживающих гораздо больше вни-

[1]) В подлиннике enclosing number. В двумерном случае порядок $W(\varphi, y)$ замкнутой кривой φ относительно точки y называется winding number — числом оборотов (кривой φ вокруг точки y). — *Прим. перев.*

мания. Вот первый из них: можно ли, не нарушая истинности главной теоремы, заменить в ней шар и сферу какими-либо другими обьектами? Конечно, их всегда можно заменить топологически эквивалентными объектами вроде прямоугольного параллелепипеда и ограничивающей его поверхности. Но можем ли мы заменить их топологически отличающимися от них объектами, по существу не изменяя заключения главной теоремы? Ответ для размерностей, больших, чем 2, положителен. Пусть, например, T — тор в R^3 и D — ограниченная им область в пространстве (например, бублик и его поверхность T). Можно так определить порядок $W(f\,|\,T, y)$, чтобы для всех внутренних точек области D он был равен единице, а для всех точек ее дополнения — нулю. Другими примерами в R^3 могут служить многосвязные поверхности и ограниченные ими области. На рис. 37.1 изображены тройной крендель и его граница.

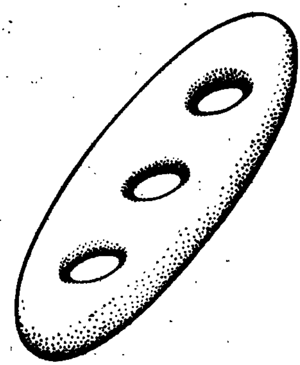


Рис. 37.1.

Второй вопрос, который мы оставили в стороне, состоит в следующем: почему мы рассматриваем только отображения n-мерных множеств в n-мерные? Можно ли так обобщить нашу главную теорему, чтобы она годилась и для отображений k-мерных множеств в R^n? Расскажем вкратце, что можно сделать в этом направлении в случае $k=2$ и $n=3$. Пусть $f\colon D \to R^3$ — непрерывное отображение круга в пространство, и $\varphi\colon [a, b] \to R^3$ — замкнутая кривая в R^3, не пересекающая образа fC ограничивающей круг D окружности C. Поставим двум кривым $f\,|\,C$ и φ в соответствие целое число $W(f\,|\,C, \varphi)$, называемое их *коэффициентом зацепления*. На рис. 37.2 приведены пять примеров, в которых — слева направо — коэффициенты зацепления равны 0, 1, 2, 4 и 0. Новый вариант главной теоремы звучит так: *если коэффициент зацепления $W(f|C, \varphi)$ не равен нулю, то образ fD хотя бы в одной точке пересекает замкнутую кривую* φ. Читатель может проверить это утверждение на пяти примерах рис. 37.2. В первом и пятом примерах можно нарисовать поверхность, границей которой служит нижняя замкну-

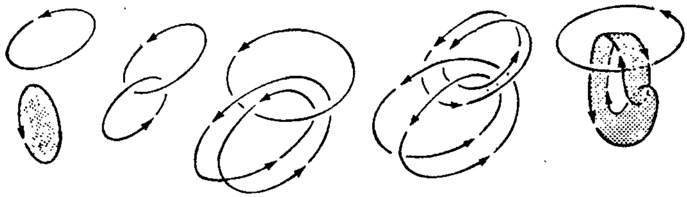


Рис. 37.2.

тая кривая и которая не пересекает верхнюю замкнутую кривую. Эта поверхность могла бы быть образом fD. В остальных трех примерах, как бы мы ни рисовали поверхность fD, границей которой служит нижняя кривая, она все равно пересечет верхнюю кривую. (В примерах 3 и 4 можно нарисовать закрученную ленту, т. е. лист Мёбиуса, которая не пересечет верхнюю кривую и границей которой является нижняя кривая, но она не может быть образом fD, поскольку она односторонняя.)

Заметим, что порядок $W(f|C, y)$ на плоскости связывает замкнутую кривую и точку, но когда мы переходим к отображениям круга в R^3, точка y заменяется замкнутой кривой φ, а порядок кривой относительно точки превращается в коэффициент зацепления. Если бы нам нужно было сформулировать аналог нашей главной теоремы для отображений круга в R^4, то нам потребовалось бы понятие «коэффициента зацепления» $W(f|C, \varphi)$ замкнутой кривой $f|C$ и замкнутой поверхности φ в пространстве R^4. Под замкнутой поверхностью в R^4 мы понимаем непрерывное отображение в пространство R^4 сферы, или тора, или любой из многосвязных поверхностей.

Таким образом, точка, замкнутая кривая и замкнутая поверхность служат в размерностях 0, 1 и 2 примерами понятия, определяемого для всех размерностей и называемого *циклом*. Объекты, границами которых они являются (например, промежутки, круги, шары и т. д.), называются *цепями*. Циклы, цепи, их гомологии и гомотопии, их пересечения и зацепления составляют основное содержание увлекательнейшей области, которая называется теорией гомологий и является главной частью топологии.

Мы показали, как некоторые из простейших идей топологии можно использовать для доказательства теорем, которые интуитивно поиятны и в то же время являются очень тонкими. Мы имеем в виду теоремы существования. Обобщения этих теорем на случай более высоких размерностей могут быть сформулированы и доказаны с помощью понятий теории гомологий.

Читатель, желающий узнать, как дальше развиваются идеи, изложенные в этой книге, может обратиться к учебникам топологии:

Hall D. W., Spencer G. L., Elementary topology, John Wiley and Sons, New York, 1955.

Hocking J. C., Young G. S., Topology, Addison-Wisley, Reading, Mass., 1966.

Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий, изд-во «Мир», М., 1966.

Первая из этих книг служит дополнением к материалу, изложенному в ч. I по теоретико-множественной топологии, а две другие являются дополнением к материалу ч. II по алгебраической топологии.

Ответы и решения

ЧАСТЬ I

§ 1, *стр.* 20

1. Минимум $f(3)=1$, максимум $f(1)=5$, так как $f(x)=5-(x-1)^2$. Нет решения, если $y<1$ и если $y>5$. Одно решение, если $1 \leqslant y<4$ и при $y=5$. Два решения, если $4 \leqslant y<5$.
2. Так как функция x^3-5, когда x меняется от 1 до 2, принимает все значения между -4 и 3, то для некоторого x в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 2$ она примет и значение 0. Уравнение $x^3-5=0$ можно переписать в виде $x^3=5$, и, значит, это x должно быть равно $\sqrt[3]{5}$.
3. Значение этой функции при $x=3$ отрицательно, а при $x=4$ положительно; поэтому между 3 и 4 она принимает нулевое значение.
4. Минимум $f(5)=\frac{1}{5}$. Максимума не существует, потому что при любом $n=1, 2, 3, \ldots$ функция f принимает значения $f(1/n)=n$. Заметим, что значение $f(0)$ не определено.
5. В этом случае каждое значение функции f равно 3 (ее графиком служит горизонтальный прямолинейный отрезок), так что $m=M=3$.
6. Минимум $f(0)=0$. Максимума не существует, потому что число 5 не входит в промежуток $[0, 5)$.

§ 2, *стр.* 29

1. Чтобы доказать равенство двух множеств, нужно показать, что каждый элемент первого множества является и элементом второго, и наоборот. Чтобы доказать первое утверждение, возьмем $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогда x принадлежит A или B и, кроме того, принадлежит C. Таким образом, нужно рассмотреть два случая.

   Случай 1: $x \in A$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in A \cap C$ и, значит, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Случай 2: $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in B \cap C$ и, значит, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   Для доказательства второго утверждения возьмем $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$.

Случай 1: $x \in A \cap C$. Следовательно, $x \in A$ и $x \in C$. Поэтому $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$, откуда $x \in (A \cup B) \cap C$.
Случай 2: $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in B$ и $x \in C$. Поэтому $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$, откуда $x \in (A \cup B) \cap C$.
В любом из этих случаев $x \in (A \cup B) \cap C$ (рис. P1).

2. См. рис. P2.

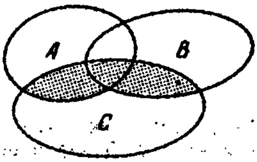


Рис. P1.

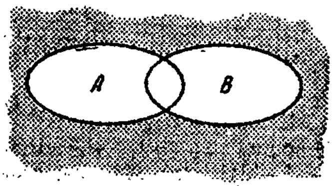


Рис. P2.

3. Так как множество B и его дополнение не имеют общих точек, то и любое подмножество множества B и дополнение B не имеют общих точек.

4. a) Следуя схеме, описанной в ответе на задачу 1, возьмем $y \in f(A \cup B)$. Тогда найдется такая точка $x \in A \cup B$, что $fx = y$. Если $x \in A$, то $y \in fA$, а если $x \in B$, то $y \in fB$. Таким образом, в любом случае $y \in fA \cup fB$. Для обратного рассуждения возмем $y \in fA \cup fB$. Если $y \in fA$, то найдется такая точка $x \in A$, что $fx = y$, и так как $x \in A \cup B$, то $y \in f(A \cup B)$. Если же $y \in fB$, то $y = fx$ для некоторой точки $x \in B$, и так как $x \in A \cup B$, то $y \in f(A \cup B)$. Таким образом, в любом случае $y \in f(A \cup B)$.

   b) Пусть $y \in f(A \cap B)$. Тогда $y = fx$ для некоторой точки $x \in A \cap B$. Так как $x \in A$, то $y \in fA$, а так как $x \in B$, то $y \in fB$. Следовательно, $y \in fA \cap fB$. (Обратное рассуждение не проходит. Допустим, что X состоит из двух точек A и B, а Y имеет лишь одну точку y. Тогда $fA = y = fB$, $f(A \cap B) = \varnothing$, а пересечение $fA \cap fB$ равно y.)

5. a) Окружность с центром в S.
   b) Прямая, проходящая через S.
   c) Дуга некоторой окружности (плоскость, проходящая через N и через данный отрезок, пересекает X по окружности).
   d) Радиус этой окружности вдвое больше радиуса сферы.
   e) Все точки большого полукруга, соединяющего N и S, за исключением точки N.

6. gf: $y_1 = -x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 4$;
fg: $y_1 = -x_1 + 3$, $y_2 = x_2 - 4$;
f^{-1}: $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 + 4$;

$$g^{-1}\colon y_1=-x_1,\qquad y_2=x_2;$$
$$(gf)^{-1}\colon y_1=-x_1-3,\ y_2=x_2+4;$$
$$f^{-1}g^{-1}\colon y_1=-x_1-3,\ y_2=x_2+4;$$
$$g^{-1}f^{-1}\colon y_1=-x_1+3,\ y_2=x_2+4.$$

Нет; $g^{-1}f^{-1}\neq(gf)^{-1}$.

7. b) $f^{-1}Y=X$; $f^{-1}\varnothing=\varnothing$. c) $f^{-1}A\subset f^{-1}B$.

8. Условие $x\in(gf)^{-1}C$ означает, что $gfx\in C$, а это в свою очередь означает, что $fx\in g^{-1}C$ и, следовательно, что $x\in f^{-1}(g^{-1}C)$. Таким образом, условие $x\in(gf)^{-1}C$ означает, что $x\in f^{-1}(g^{-1}C)$. (Мы пользуемся словом «означает», чтобы сказать, что два утверждения эквивалентны, т. е. что каждое из них влечет за собой и другое.) Чтобы доказать второе утверждение, допустим, что $x\neq x'$. Так как функция f взаимно однозначна, то $fx\neq fx'$, а так как взаимно однозначна и функция g, то $gfx\neq gfx'$. Пусть теперь $z\in Z$. Так как $gY=Z$, то найдется точка $y\in Y$, для которой $gy=z$, а так как $fX=Y$, найдется и точка $x\in X$, для которой $fx=y$; поэтому $gfx=z$ или $x=(gf)^{-1}z$. По определению $y=g^{-1}z$ и $x=f^{-1}y$ и, значит, $x=f^{-1}g^{-1}z$. Следовательно, $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

§ 3, *стр.* 37

1. Если точки x, y и z лежат на одной прямой и точка y расположена между x и z.
2. $r'=r-d(x,x')$.
3. Потому что $N(fx,\varepsilon)\supset N\left(fx,\frac{1}{2}\right)$ для всех $\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}$.
4. Потому что $N(x,\delta')\subset N(x,\delta)$ для всех $\delta'<\delta$.
5. Разрывна в каждой точке окружности C, непрерывна во всех остальных точках. Соответствующего δ не существует для $\varepsilon\leqslant\sqrt{2}$.
6. Она не увеличивает расстояний:
$$d(x,x')\geqslant d(fx,fx')\ \text{для всех}\ x,x'.$$
7. Уменьшает расстояния для любой пары точек нижней полусферы. Обратная функция f^{-1} переводит каждую точку $y\in R^2$ в точку пересечения луча py с S (рис. Р3). Тот же рисунок показывает, что обратная функция непрерывна. Образ множества $N(p,r,S)-p$ есть множество точек, лежащих вне некоторого круга с центром в начале координат. Если бы значение fp было определено и функция f была непрерывной в точке p, то любая окрестность $N(fp,\varepsilon)$ должна была бы целиком содержать множество точек, лежащих вне некоторого круга; но это невозможно.
8. Пусть $x\in[a,b]$ и задано $\varepsilon>0$. Так как функция f непрерывна в точке x, то существует такое $\delta_1>0$, что $|fx'-fx|<\frac{\varepsilon}{2}$ для

всех $x' \in N(x_1, \delta_1)$. Так как непрерывна и функция g, существует такое $\delta_2 > 0$, что $|gx' - gx| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x' \in N(x, \delta_2)$. Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда из условия $x' \in N(x, \delta)$ следует, что

$$|fx' - fx| + |gx' - gx| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Остается применить неравенство, о котором говорится в указании.

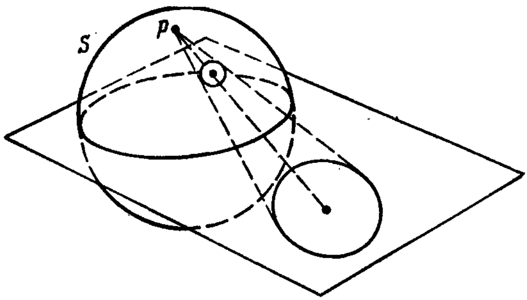


Рис. P3.

9. $\delta = d \sin 2\theta = 2d \sin\theta \cos\theta$, где $\sin\theta = \varepsilon/2$. Так как

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta},$$

то, подставляя это в формулу для δ, находим $\delta = \varepsilon d \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$.

§ 4, *стр.* 50

1. Каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством в X для любого пространства X. Так как объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, то любое конечное подмножество A пространства X как объединение конечного числа точек должно быть замкнуто. Если и само пространство X конечно, то конечно и дополнение $X - A$. Поэтому $X - A$ замкнуто и A открыто.
2. Вот одно из решений: $V = U \cup (R^2 - L)$.
3. $x^2 + y^2 < 1$.
4. Множество, состоящее из одной точки, или же R^2.
5. Пусть X состоит из двух точек x_1, x_2, $A = \{x_1\}$ и $B = \{x_2\}$. Множества A и B дополнительны. $A \cup B = X$; $X - (A \cup B) = \varnothing$; $(X - A) \cup (X - B) = B \cup A = X$.

6. Пусть $X=R$, $A=(0,2]$, $B=[1,3)$; тогда объединение $A\bigcup B$ открыто в R.
7. Если U открыто в X, то по теореме 4.4 существует такое открытое в R^n множество W, что $U=X\bigcap W$. Пусть $V=Y\bigcap W$. Тогда V открыто в Y и $U=X\bigcap V$, потому что $X\bigcap Y=X$.
8. Пересечение этих промежутков состоит из единственной точки 0, а отдельная точка не является открытым в R множеством.
9. Пусть $X=\{x_1\}$ и $Y=\{y_1, y_2\}$, причем $fx_1=y_1$, и пусть $A=\varnothing\subset X$. Тогда $fA=\varnothing$, $Y-fA=Y$ и $f(X-A)=fX=y_1$. Таким образом, $Y-fA\neq f(X-A)$.
10. Условие $x\in X-f^{-1}A$ означает, что $x\in X$ и $x\notin f^{-1}A$. Условие $x\in X$ равносильно условию $fx\in Y$, а условие $x\notin f^{-1}A$ — условию $fx\notin A$. Таким образом, оба они равносильны условию $fx\in Y-A$, т. е. тому, что $x\in f^{-1}(Y-A)$.
11. Пусть $A\subset X$ — множество, открытое в X. Тогда для каждой точки $x\in A$ существует некоторая ее окрестность в X, лежащая в A. Каждая окрестность открыта. Нужно взять объединение всех этих окрестностей.

§ 5, *стр.* 59

1. Если бы число $\sqrt{3}$ было рациональным, то мы могли бы написать $\sqrt{3}=a/b$, где a и b — целые числа, не имеющие общего множителя. Возводя обе части в квадрат и умножая на b^2, получаем $a^2=3b^2$, откуда следует, что a^2 делится на 3. Если бы число a не делилось на 3, то оно имело бы вид $a=3k+1$ или $a=3k+2$, где k — некоторое целое число. В первом случае

$$a^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1=3k'+1,$$

а во втором

$$a^2=9k^2+12k+4=3k''+1.$$

В обоих случаях a^2 не делилось бы на 3. Но $a^2=3b^2$ делится на 3; следовательно, и a должно делиться на 3, и, значит, $a=3k$ для некоторого целого k. Тогда $3b^2=(3k)^2=9k^2$; поэтому $b^2=3k^2$, и, значит, b^2 делится на 3, откуда следует, что и b делится на 3. Мы пришли к противоречию, поскольку по предположению a и b не имели общих множителей.
2. Пусть $2n^2=m^2$; так как n — целое число, его разложение на простые множители содержит либо четное, либо нечетное число двоек. В любом случае n^2 содержит четное число двоек, а $2n^2$ — нечетное их число. Но m^2 имеет в качестве простых множителей четное число двоек. Таким образом, если m и n — целые числа, то $2n^2\neq m^2$, т. е. уравнение $2n^2=m^2$ не имеет решения в целых числах n, m.
3. Пусть $2n^3=m^3$. Если число 2 встречается в качестве простого множителя в разложении m ровно k раз, то в m^3 оно встре-

чается $3k$ раз. Если в разложении n оно встречается k' раз, то в n^3 оно встречается $3k'$ раз, а в $2n^3$ ровно $3k'+1$ раз. Так как число любых множителей в разложении на простые множители определяется однозначно, то уравнение $2n^3=m^3$ может иметь решение в целых числах лишь в том случае, если существуют такие целые k и k', что $3k'+1=3k$. Но это невозможно, поскольку $3k'+1$ не делится на 3, а $3k$ делится.

4. Если бы существовали рациональные решения $x=m/n$ и $y=p/q$, где m, n, p и q — целые числа, то мы имели бы

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{2m^2}{n^2}, \text{ так что } (np)^2=2(mq)^2 \text{ и } \sqrt{2}=\frac{np}{mq}.$$

Это означало бы, что $\sqrt{2}$ — рациональное число. Но в § 5 было доказано, что это не так.

5. Если бы нашлись такие целые числа k, m и n, что

$$\left(\frac{k+m\sqrt{2}}{n}\right)^3=2 \text{ и } m\neq 0,$$

то после возведения в куб мы получили бы $k^3+3k^2m\sqrt{2}+3km^2 2+2m^3\sqrt{2}=2n^3$, откуда следует, что

$$\sqrt{2}=\frac{2n^3-k^3-6km^2}{3k^2m+2m^3}$$

есть рациональное число, — противоречие. При $m=0$ мы приходим к упражнению 3.

6. Частичные суммы этого ряда равны

$$0;\ 1;\ 0{,}9;\ 0{,}91;\ 0{,}909;\ 0{,}9091;\ 0{,}90909;\ \ldots,$$

а промежутки от каждой из этих сумм до следующей образуют стягивающуюся последовательность:

$$[0,\ 1]\supset[0{,}9;\ 1]\supset[0{,}9;\ 0{,}91]\supset[0{,}909;\ 0{,}91]\supset\ldots.$$

Эта последовательность стягивается регулярно. Ее пересечение есть число с десятичным разложением 0,909090... (90 в периоде). Оно равно 10/11 и является суммой данного ряда.

7. Аналогично упражнению 6:

$$[0,\ 1]\supset\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\supset\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]\supset\left[\frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right]\supset\ldots.$$

Сумма равна $\frac{2}{3}$.

8. Первый шаг деления показывает, что частное лежит между 3 и 4, так что мы получаем промежуток [3; 4]. Второй шаг показывает, что частное лежит между 3,5 и 3,6, откуда находим второй промежуток [3,5; 3,6]. Затем находим промежуток [3,59; 3,60], затем [3,598; 3,599], ...

9. $[1;\ 2]\supset[1{,}5;\ 1{,}6]\supset[1{,}58;\ 1{,}59]\supset\ldots$.

Если s — положительное число, меньшее чем $b-a$, то все целочисленные кратные числа s равномерно расположены вдоль прямой, причем расстояние между двумя соседними числами равно s. Так как расстояние между a и b больше, чем s, то промежуток (a, b) должен содержать какое-либо число, кратное s. Чтобы построить рациональное число, принадлежащее (a, b), выберем $s=1/n$, где n — такое целое число, что $n>1/(b-a)$. Отсюда следует, что $s=1/n<(b-a)$ и что некоторое кратное $ms=m/n$, являющееся рациональным числом, лежит в (a, b). Чтобы получить иррациональное число, содержащееся в (a, b), возьмем $s=\sqrt{2}/n<(b-a)$.
Множество Q не замкнуто, потому что для каждой точки $x \in R-Q$ и каждого $r>0$ открытый промежуток $N(x, r)$ содержит рациональные числа. Оно и не открыто, потому что каждый открытый промежуток содержит иррациональные числа.
Так как $a<b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$, то выберем любой промежуток $I_0=[a_0, b_0]$, где $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Пусть $c_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$. Тогда $a_0<c_0<b_0$. Либо $c_0 \in A$, либо $c_0 \in B$. Если $c_0 \in A$, то берем промежуток $I_1=[a_1, b_1]$, где $a_1=c_0$ и $b_1=b_0$; если же $c_0 \in B$, то пусть $a_1=a_0$ и $b_1=c_0$. Продолжая таким же образом, мы построим стягивающуюся последовательность замкнутых промежутков, такую, что при каждом $n \geqslant 1$ промежуток $I_n=[a_n, b_n]$ является половиной промежутка I_{n-1} и $a_n \in A$, $b_n \in B$. По теореме о полноте промежутки I_n имеют общую точку c. По построению, если $c \in A$, то все предыдущие a_n не превосходят c, и c — наибольшее число множества A; если $c \in B$, то c — наименьшее число множества B (см. доказательство теоремы о полноте).

§ 6, *стр.* 72

Если X ограничено, то оно содержится в некотором достаточно большом шаре B. Если $A \subset X$, то A содержится в B; поэтому любое подмножество A множества X также ограничено.
Если X и Y — два ограниченных множества, то $X \subset N(x_0, r)$ и $Y \subset N(y_0, s)$ для некоторых r и s. Пусть $t=d(x_0, y_0)$; тогда

$$N(x_0, r+s+t) \supset N(x_0, r) \cup N(y_0, s) \supset X \cup Y.$$

Например, каждое n есть ограниченное множество, а бесконечная последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ не ограничена.

$$U_k=\left[a, b-\frac{b-a}{2^k}\right), \text{ или } U_k=\left[a, b-\frac{b-a}{k}\right) \text{ и т. д.}$$

В первом случае U_k состоит из всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $1/k<d(x_0, x) \leqslant 1$, т. е. U_k — кольцо, содержащее ограничивающую его внешнюю окружность, но не содержа-

щее внутреннюю. Во втором случае U_k состоит из всех точек $x \in X$, у которых

$$d(x, y_0) > \frac{1}{k},$$

т. е. U_k — луночка.

6. Наименьшее число таких промежутков равно 11. Например, пусть $s = 1/100$. Положим, $U_1 = (-s, 1-s)$, $U_2 = (1-2s, 2-2s)$, ..., $U_{11} = (10-11s, 11-11s)$. Это конечное множество промежутков из C, и так как оно покрывает X, то и все C является покрытием X.
7. Если точка y лежит вне C_1, то прямолинейный отрезок, соединяющий x_0 и y, пересекает окружность C_1 в точке c, для которой U_c содержит y. Окружность C_r замкнута и ограничена и потому компактна (рис. Р4). Открытое кольцо не

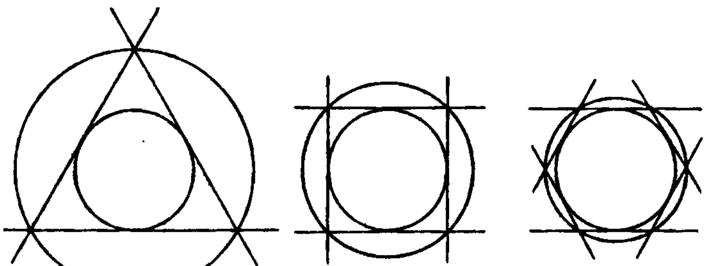


Рис. Р4.

может быть покрыто конечным числом множеств из C, потому что, когда r приближается к 1, число полуплоскостей, требуемых для покрытия окружности C_r, неограниченно возрастает.
8. Объединение конечного покрытия множества X и конечного покрытия множества Y является конечным покрытием объединения $X \cup V$.
9. Можно взять в качестве одноэлементных множеств целые числа или же рассмотреть R как объединение замкнутых промежутков $[-n, n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
10. Для любой точки $y \in Y - X$ множество точек, находящихся от y на расстоянии, большем r, открыто, а совокупность всех таких множеств для $r > 0$ покрывает X. Выберем конечное покрытие. Возьмем наименьшее r, встречающееся в этом покрытии. Тогда $N(y, r) \cap X = \varnothing$. Это доказывает, что $Y - X$ открыто и, значит, X замкнуто.
11. Пусть a и b — иррациональные числа (например, $a = -\sqrt{2}$ и $b = \sqrt{2}$). Тогда множество $X = [a, b] \cap Q$ замкнуто в Q, так как промежуток $[a, b]$ замкнут в R, и X не содержит ни наибольшего, ни наименьшего рационального числа.

12. $fx=nx$; $f:[-1,1]\to[-n,n]$. Нет, потому что промежуток I компактен, поэтому и его образ fI должен быть компактен; но R не компактно. Функция $fx=x/(1-x^2)$ отображает промежуток $(-1, 1)$ на R; это же делает и функция $fx=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Существует много таких функций: любая непрерывная возрастающая функция с вертикальными асимптотами $x=-1$ и $x=+1$ удовлетворяет этим требованиям.

13. Пусть сначала X компактно и C — покрытие множества X множествами, открытыми в R^m. Тогда совокупность C' пересечений $V'=V\cap X$ для всех $V\in C$ является покрытием X множествами, открытыми в X. Так как X компактно, C' содержит конечное подпокрытие D'. Множества V, соответствующие тем V', которые входят в D', образуют конечное покрытие $D\subset C$. Пусть теперь X обладает тем свойством, что каждое покрытие множества X множествами, открытыми в R^m, содержит конечное покрытие, и пусть C — покрытие X множествами, открытыми в X. Если $y\in R^m-X$, то множество точек, находящихся от y на расстоянии, большем любого данного $r>0$, открыто в R^m, а совокупность всех таких множеств образует покрытие множества X. Так как оно содержит открытое подпокрытие, точка y имеет окрестность, не пересекающуюся с X. Поэтому X замкнуто. Для каждого $V\in C$ пусть $V'=V\cup(R^m-X)$. Совокупность всех таких множеств для любых $V\in C$ образует покрытие C' множества X множествами, открытыми в R^m. Конечному подпокрытию, содержащемуся в C', соответствует конечное подпокрытие, содержащееся в C.

§ 7, *стр.* 81

1. a) Первое множество связно; второе не связно и разбивается на две непересекающиеся дуги окружности, соединяющие удаленные точки, которые, конечно, в эти дуги не входят.

   b) Первое множество связно; второе разбивается на две частичные дуги.

   c) Второе и третье множества связны; первое связно лишь, если оно состоит из одной точки, потому что если оно содержит хотя бы две точки, то любая точка A и ее дополнение B образуют разбиение этого множества.

   d) i) Связно (кусок резиновой трубки).

   ii) Связно (разрезав автомобильную камеру вдоль Q, можно развернуть ее в кольцо).

   iii) Связно (кусок резиновой трубки, разрезанный по длине, разворачивается в прямоугольник).

   iv) Не связно (кусок, вырезанный из камеры, и оставшаяся часть камеры).

   v) Не связно (камера, разрезанная на две трубки).

   vi) Не связно (кольцевая прокладка, вырезанная из камеры, и оставшаяся часть камеры).

vii) Связно (удаление двух окружностей типа P из тела в пространстве похоже на процарапывание двух меток на поверхности тела; любые две точки могут быть соединены через внутренние точки).

e) Не связно; A и B — две данные окружности; $A \cap B = \varnothing$, так что пересечение связно.

f) i) Связно. ii) Связно. iii) Не связно. iv) Связно. v) Связно.

2. Если D звездообразно относительно точки p, то каждая точка $x \in D$ лежит на некотором прямолинейном отрезке px в D, и этот отрезок связен. Любые две точки x и y множества D лежат на ломаной линии $xp \cup py$ в D, которая также связна как объединение двух связных множеств с общей точкой.

3. Во всех этих случаях две точки, лежащие внутри, вне или на поверхности, могут быть соединены дугой окружности.

4. Например, в качестве X можно взять две точки, а в качестве образа Y — одну точку.

5. Проекция f касательной на окружность не увеличивает расстояний и потому непрерывна. Пусть g — проекция хорды из центра окружности на отрезок касательной к окружности, параллельной этой хорде. Тогда g — подобие; поэтому композиция fg непрерывна. Хорда есть отрезок, следовательно, она связна, а значит, связна и дуга как непрерывный образ связного множества.

6. Две полуокружности, пересечение которых состоит из двух их концов.

7. Множество точек с рациональной абсциссой x состоит из семейства прямых, параллельных оси y, а множество точек с рациональной ординатой y состоит из семейства прямых, параллельных оси x. Объединение этих двух множеств образует сетку. Любые две точки этой сетки можно соединить ломаной, состоящей не более чем из трех отрезков. Точки, имеющие *точно* одну рациональную координату, разбиваются, например, прямой $y=x$ на два множества, одно из которых состоит из точек, лежащих под этой прямой, а другое — из точек, лежащих над нею. Множество точек, имеющих две рациональные координаты, разбивается, например, прямой $x=\sqrt{2}$.

8. X разбивает окружность с центром $(0, 0)$ и радиусом r', где $r'>0$ — любое иррациональное число.

9. Пусть X — данное множество, причем $X \neq \varnothing$. Пусть x_0 — точка множества X. Разобьем дополнение $R-X$ на множество A чисел, меньших x_0, и множество B чисел, больших x_0. Так как X содержит все точки, лежащие между любыми двумя его точками (см. доказательство теоремы 7.6), то отсюда следует, что каждая точка из A лежит левее всех точек из X, а каждая точка из B лежит правее всех точек из X. Если A и B пусты, то $X=R$. Рассмотрим все возможные случаи. Случай 1, когда $A \neq \varnothing$ и $B = \varnothing$. Применяя упражнение 11 из § 5, получаем число a, являющееся либо самым

большим в A, либо самым маленьким в X. Если $a \in A$, то X — открытая полупрямая, состоящая из всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<+\infty$; если же $a \in X$, то X есть замкнутая полупрямая $a \leqslant x<+\infty$. Случай 2, когда $A=\varnothing$ и $B \neq \varnothing$, аналогичен. В случае 3, когда $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, применим упражнение 11 из § 5 к сечению, образованному множествами A и $X \cup B$, и получим число a, являющееся либо самым большим в A, либо самым маленьким в X. Применяя затем то же упражнение к сечению $A \cup X$ и B, получаем число b, являющееся либо самым маленьким в B, либо самым большим в X. Если $a=b$, то X состоит из одной точки x_0. Если $a<b$, то X состоит из открытого промежутка (a, b) без концов или же вместе с каким-либо одним или обоими концами.

10. Так как промежутки замкнуты, то их пересечение X также замкнуто. Допустим, что X имеет более одной точки. Если x и y — любые две точки множества X, то промежуток $[x, y]$ содержится в каждом промежутке данной последовательности, а потому и в X. Следовательно, X связно. Так как множество X замкнуто и ограничено, то оно компактно, а так как оно компактно и связно, то оно является замкнутым промежутком.

11. Пусть $I_0=[a_0, b_0]$, где $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Если середина m промежутка I_0 принадлежит A, то положим $I_1=[m, b_0]$; в противном случае пусть $I_1=[a_0, m]$. Построим по тому же правилу такую стягивающуюся последовательность промежутков $I_n=[a_n, b_n]$, что при каждом n промежуток I_n является половиной промежутка I_{n-1}, $a_n \in A$ и $b_n \in B$. Пусть c — общая точка всех I_n. Каждая окрестность точки c содержит промежуток I_n с достаточно большим номером n, поэтому она содержит точки как множества A, так и множества B. Таким образом, если $c \in A$, то A не открыто, а если $c \in B$, то не открыто B. Это противоречит предположению, что A, B есть разбиение, потому что $c \in I_n \subset I=A \cup B$.

§ 8, *стр.* 92

1. a) См. Ответ к упражнению 12 из § 6.
   b) Сужение на полуоткрытый промежуток $[0, 1)$ отображения из ответа к упражнению а).
   c) Введем на плоскости Y полярные координаты (r, θ) с началом в центре окружности X. Отображение $f: X \to Y$ определим формулой $f(r, \theta)=(r/(b^2-r^2), \theta)$, где b — радиус окружности X. Иными словами, f топологически отображает каждый диаметр окружности X на содержащую его прямую с помощью функции того типа, которая рассматривалась в а).

2. Окружность с одной выколотой точкой при стереографической проекции топологически отображается на прямую. В силу 1 а) прямая топологически эквивалентна открытому промежутку. Другой способ: пусть x — точка на окружности с вы-

колотой точкой p и y — длина дуги окружности от p до x, измеряемая против часовой стрелки. Тогда функция $y=fx$ топологически отображает окружности с выколотой точкой на открытый промежуток $(0, l)$, где l — длина окружности.

3. Например, множество всех целых чисел, множество всех положительных рациональных чисел, множество всех положительных иррациональных чисел, множество $0, \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ и т. д.
4. a) Да. b) Нет; ни в одной окрестности точки 0 не существует связного открытого множества, содержащего 0. c) Да. d) Нет.
5. a) Например, множество всех целых чисел, прямая, замкнутая полупрямая.
   b) Пусть X замкнуто в R^m и $x \in X$. Для любого $r>0$ окрестность $N(x, r)$ содержится в множестве B_r всех точек x', удовлетворяющих условию $d(x, x') \leqslant r$. Так как B_r замкнуто и ограничено, то оно компактно. Поскольку X замкнуто, пересечение $X \cap B_r$ также компактно. Оно содержит окрестность $N(x, r, X)$.
6. a) Не топологическое; прямая не ограничена, но топологически эквивалентна открытому промежутку, который ограничен.
   b) Топологическое.
   c) Не топологическое; любые два отрезка одной и той же или разной длины топологически эквивалентны.
   d) Топологическое.
   e) Не топологическое; например, квадрат топологически эквивалентен любому четырехугольнику, выпуклому или нет.
   f) Топологическое.
   g) Топологическое.
7. Так как X и Y топологически эквивалентны, то существует топологическое отображение f множества X на Y. Пусть C — открытое покрытие множества Y. Для каждого $U \in C$ обозначим $U'=f^{-1}U$, и пусть C' — совокупность всех таких множеств U'. Так как f непрерывно, каждое множество U' открыто. Из того, что C покрывает $fX=Y$, следует, что C' покрывает X. Поскольку X компактно и C' есть покрытие множества X открытыми множествами, C' содержит конечное покрытие, скажем $U'_1, U'_2, \ldots, U'_k$. Тогда соответствующие множества $U_1, U_2, \ldots, U_k$ из C покрывают Y, потому что $Y=fX$ и каждое $U_i=fU'_i$. Следовательно, Y компактно.
8. a), d), e), g).

§ 9, *стр.* 95

1. $1/\sqrt{2}$.
2. a) График есть перевернутая парабола, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ и имеющая вершину в точке $(1/2, 1)$.
   b) Нет; например, $f0=f1=0$.
   c) $f0=0$ и $f(3/4)=3/4$.

3. a) График есть парабола, проходящая через точки $(0, 1)$ и $(1, 1)$ и имеющая вершину в точке $(1/2; 3/4)$.
   b) Нет; например, $f0=f1=1$; кроме того, прообраз $f^{-1}0$ пуст.
   c) $f1=1$.
4. Покажем, что каждое множество Y, топологически эквивалентное X, обладает тем же свойством. Пусть $h: X \to Y$ — гомеоморфизм и $f: Y \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда отображение $h^{-1}fh: X \to X$ непрерывно. Пусть $x \in X$ — неподвижная точка отображения $h^{-1}fh$, так что $h^{-1}fhx=x$. Отсюда следует, что $fhx=hx$ и, значит, $hx \in Y$ — неподвижная точка отображения f.
5. x^2, x^3, $\sqrt{x}$, или x^m для любого положительного m, отличного от 1.
6. Каждое из отображений, приведенных в ответе к упражнению 5.
7. Допустим, что f непрерывно отображает промежуток $[0, 1)$ на себя. Тогда найдется такая точка $b \in [0, 1)$, что $fb=0$. Если $b=0$, то точка 0 неподвижна; поэтому предположим, что $b>0$. В таком случае разность $fx-x$, при $x=0$ положительна, а при $x=b$ отрицательна. По главной теореме тогда существует такая точка $x \in [0, b]$, что $fx-x=0$.

§ 10, *стр.* 98

1. a) Касательные к окружности C, проведенные из точки p, делят прямую L на три подмножества, именно на множество, состоящее из точек a и b пересечения касательных с L; множество точек, лежащих между a и b, и множество точек, не принадлежащих отрезку $[a, b]$. У каждой точки прямой L, лежащей между a и b, имеется два прообраза, у точек a и b — по одному прообразу, а у точек прямой L, не принадлежащих отрезку $[a, b]$, нет прообразов.
   b) Точки пересечения прямой, проходящей через центр окружности C и точку p, с окружностью.
2. Каждая точка прямой L имеет прообраз, состоящий из одной точки. Проекция не отображает точку p' в L, и она не может быть доопределена в этой точке и остаться непрерывной, так как окружность C компактна, а прямая L нет.
3. Пусть $f: D \to D'$ — произвольное непрерывное отображение. Рассмотрим композицию f с отражением g: $D \to D$. Тогда отображение $gf: D \to D$ имеет неподвижную точку x, и условие $gfx=x$ означает, что точка fx является отражением точки x.
4. Рассмотрим композицию f с антиподальным отображением $g: D' \to D$. Тогда отображение $gf: D \to D$ имеет неподвижную точку x, и условие $gfx=x$ означает, что точка fx антиподальна точке x.
5. Пусть f: $C \to C$ — отображение, дважды навертывающее окружность C на себя и удваивающее при этом длины всех дуг, начинающихся в фиксированной точке отсчета (например, если (r, θ) — *полярные* координаты на плоскости с полюсом в центре окружности C, то $f(r, \theta)=(r, 2\theta)$). Тогда f отображает каж-

дую пару диаметрально противоположных точек в одну точку. Теперь образуем композицию f с любым непостоянным отображением $g: C \to L$ окружности C в прямую L, например с проекцией.

§ 11, *стр.* 105

1. Задачу решает разрез, проведенный через линию центров; это верно и для любых двух блинов, обладающих тем свойством, что каждый из них симметричен относительно некоторой точки, именно центра.
2. Только если эти многоугольники имеют четное число сторон; если многоугольник имеет нечетное число сторон, то этот метод применим лишь в том случае, когда какая-либо из его вершин лежит на линии центров.
3. Существует бесконечно много способов: любая пара перпендикулярных прямых, проходящих через центр.
4. Поворот на 90° переводит каждое решение в то же самое решение.
5. Заключим оба блина в достаточно большую окружность C, имеющую тот же центр z, что и круглый блин. Пусть r — радиус окружности C. Для каждой точки $x \in C$ обозначим через P_x площадь той части блина неправильной формы, которая лежит слева от прямой xz (ориентированной от x к z), и через Q_x — площадь той части этого блина, которая лежит справа от xz. Пусть fx — разность $P_x - Q_x$. При переходе от точки x к диаметрально противоположной точке x' стороны меняются местами; поэтому $fx' = -fx$. Так как функция f непрерывна и меняет знак, когда точка x обегает полуокружность, в некоторой точке она обращается в нуль.
6. Для лезвий, имеющих форму полуокружности, не верно, что $x'_A = -x_A$ (при повороте на 180° вокруг своего центра полуокружность не переходит в себя). Рассуждение сохраняет силу для любых кривых лезвий, инвариантных относительно поворота на 180°, например для лезвий в форме буквы S.

§ 12, *стр.* 110

1. Заметим сначала, что для любых x и x'

$$|x^2 - x'^2| = |x + x'|\,|x - x'| \leqslant (|x| + |x'|)\,|x - x'|.$$

Если заданы точка x и число $\varepsilon > 0$, то возьмем в качестве δ меньшее из чисел

$$1 \text{ и } \frac{\varepsilon}{2|x|+1}.$$

Пусть x' удовлетворяет условию $|x' - x| < \delta$. Тогда из того, что $\delta \leqslant 1$, следует, что $|x'| < |x| + 1$, и потому $|x| + |x'| < 2|x| + 1$. Так как, кроме того, $\delta \leqslant \varepsilon/(2|x|+1)$, то $|x^2 - x'^2| \leqslant (|x| + |x'|)|x - x'| < (2|x| + 1)|x - x'| \leqslant \varepsilon$.

Пусть заданы точка x и число $\varepsilon>0$. Так как функция g непрерывна в точке x, то существует такое $\delta_g>0$, что для всех $x'\in N(x,\delta_g)$

$$|gx-gx'|<\frac{\varepsilon}{2(|fx|+1)} \quad \text{и} \quad |gx-gx'|<1.$$

Отсюда следует, что

$$|fx||gx-gx'|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |gx'|<|gx|+1.$$

Так как функция f непрерывна в точке x, то существует такое $\delta_f>0$, что для всех $x'\in N(x,\delta_f)$

$$|fx-fx'|<\frac{\varepsilon}{2(|gx|+1)}.$$

Тогда

$$|gx'||fx-fx'|<(|gx|+1)|fx-fx'|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь возьмем в качестве δ меньшее из чисел δ_g и δ_f. Тогда для всех $x'\in N(x,\delta)$

$$|fx||gx-gx'|+|gx'||fx-fx'|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

От свободного члена.

На основании критерия $b\geqslant 6$. Разложение многочлена на множители имеет вид

$$fx=x(x-3)(x+1).$$

Таким образом, $fx>0$ при $x>3$ и $fx<0$ при $x<-1$.
$b=25$.

ЧАСТЬ II

§ 13, *стр.* 116

a) Горизонтальная полоса, ширина которой равна диаметру цилиндра Q.
b) Горизонтальная прямая.
c) Вертикальный прямолинейный отрезок, пересекающий полосу поперек.
d) Наклонная прямая переходит на цилиндре Q в винтовую линию, которая проектируется в волнообразную кривую, колеблющуюся от нижней границы полосы до верхней.
e) Если точка p не лежит в полосе, то $f^{-1}p=\varnothing$. Если p лежит на одной из прямых, ограничивающих полосу, то $f^{-1}p$ есть последовательность точек, равномерно расположенных на вертикальной прямой, причем расстояние между

соседними точками равно $2\pi r$, где r — радиус цилиндра. Если p лежит внутри полосы, то $f^{-1}p$ снова есть последовательность точек, лежащих на вертикальной прямой, и расстояние между точками, идущими через одну, равно $2\pi r$.

2. a) Образ fP состоит из всех точек плоскости, отстоящих от начала координат не больше чем на радиус сферы S.

   b) Образом прямой L при стереографической проекции служит окружность C, по которой плоскость, проходящая через p и L, пересекает сферу S, причем из C выколота точка p. Если окружность C лежит в верхней полусфере (т. е. в той же полусфере, что и p), то множество $C-p$ проектируется в эллипс, проходящий через начало, при этом p — выколота. Если окружность C лежит в обеих полусферах, то она проектируется в пару дуг эллипса, каждая из которых соединяет две точки на границе fP и одна из которых проходит через начало.

   c) Если точка q совпадает с началом или принадлежит границе образа fP, то $f^{-1}q=q$. Для остальных точек, принадлежащих fP, прообраз $f^{-1}q$ состоит из двух точек.

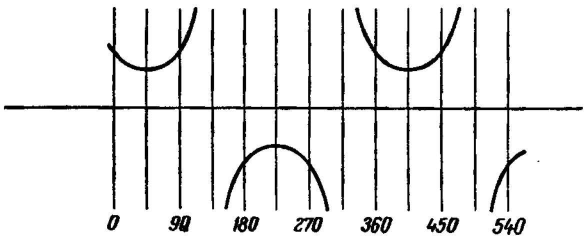


Рис. P5.

3. a) Прямая, проходящая через z.

   b) Окружность радиуса r.

   c) Спираль; когда точка движется по данной наклонной прямой равномерно, расстояние ее образа от z возрастает с постоянной скоростью.

   d) См. рис. P5.

§ 14, *стр.* 118

1. Пусть D — круг, C — граничная окружность и $S\subset C$ — верхняя полуокружность. Отображение f определим так. Сужение $f|S$ есть тождественное отображение, а любой отрезок в D, перпендикулярный горизонтальному диаметру S, отображается на свою верхнюю половину путем сжатия к верхнему концу. Тогда f есть гомеоморфизм круга D на верхний полукруг T. У любой другой фигуры A, топологически эквивалентной кругу, существует гомеоморфизм g: $A\leftrightarrow D$, а его композиция с f есть гомеоморфизм fg: $A\leftrightarrow T$.

2. Каждый радиус zx жестко отображаем на радиус zfx.
3. Общая дуга топологически эквивалентна отрезку и, следовательно, диаметру круга. С помощью упражнения 1 гомеоморфизм этой дуги на диаметр можно продолжить в гомеоморфизм множества A на верхний полукруг, а также в гомеоморфизм множества B на нижний полукруг. Таким образом, объединение $A \cup B$ гомеоморфно кругу.
4. b и c.
5. a) Нет.
   b) Любые два из трех разрезов, изображенных на рис. 14.3, приводят к множеству, гомеоморфному кругу.
   c) Три разреза.

§ 15, *стр.* 121

1. Перегнем D по диаметру так, чтобы образ fD представлял полукруг. Тогда любую точку $y \notin fC$ можно будет соединить с fz ломаной, не пересекающей fC.

§ 16, *стр.* 123

1. См. рис. Р6.
2. По теореме 4.6 композиция gf непрерывна. Областью ее определения является промежуток $[a, b]$, и gf отображает его а плоскость P. Поэтому gf есть кривая в P.

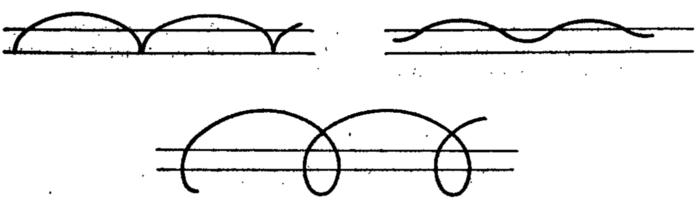


Рис. Р6.

3. Подобие: $ft = a + t(b-a)$.
   Не подобие: $ft = a + t^n(b-a)$, $n \neq 1$.

§ 17, *стр.* 126

1. 90°; —90°.
2. $A1$; $B2$; $C1$; $D0$; $E2$; $F0$; $G1$.
3. $A1$; $B2$; $C1$; $D1$; $E2$; $F3$; $G2$; $H1$; $I1$; $J0$.

§ 18, *стр.* 128

1. Те, для которых $W \neq 0$, именно: A, B, C, E и G.
2. Все, кроме J.
3. a) fC: полуокружность;
   fD: все точки области, ограниченной полуокружностью и диаметром.

b) $W=0$. Это показывает, что хотя условие $W\neq 0$ и достаточно для существования решения уравнения $y=fx$, оно не является необходимым, т. е. решение может существовать и в том случае, когда $W=0$.

§ 20, *стр.* 133

1. u, w, x, y, z.
2. u, 350; w, —10; x, 90; y, 180; z, 330.

§ 21, *стр.* 137

1. Одно решение см. на рис. 22.5; существует много других. Например, для каждой точки области F достаточно мелко тривиальное подразделение, состоящее из всей кривой.
2. a) Часть, идущая от a до d.
   b) Да; часть, идущая от f до a.
   c) Точки f и d делят кривую на две кривых, каждая из которых является неполной относительно y.

§ 22, *стр.* 141

1. Нулю.
2. a) От a до d: $20-270+(2-0)360=+470$;
   от b до g: $350-90+(2-2)360=+260$.
   b) 2.
   c) Например, луч противоположный лучу, указанному на чертеже, или любой луч с вершиной в y, пересекающий кривую φ только в двух точках.

§ 23, *стр.* 142

1. $A(\varphi_1, y)=+470$; $A(\varphi_2, y)=-30$; $A(\varphi|[t_0, t_2], y)=+440$.

§ 24, *стр.* 147

1. Любая замкнутая кривая φ в плоскости P и любая постоянная замкнутая кривая в точке y гомотопны при линейной гомотопии: проведем для каждой точки φt кривой φ отрезок, соединяющий φt с y; это — путь, по которому должна двигаться точка φt.
2. Пусть $\Phi(t,\tau)=\varphi(\tau a+(1-\tau)t)$ при $t\in[a,b]$ и $\tau\in[0,1]$. Тогда $\Phi(t,0)=\varphi t$ и $\Phi(t,1)=\varphi a$. Путь, по которому движется точка φt при гомотопии, является сужением $\varphi\,|\,[a,t]$, взятым в обратном направлении.
3. Если Q — прямоугольник, состоящий из пар (t,τ), где $t\in[a,c]$ и $\tau\in[0,1]$, то Q является объединением двух прямоугольников Q' и Q'', получающихся, если разрезать Q по вертикальной прямой $t=b$. Пусть $\Phi': Q'\to P$ и $\Phi'': Q''\to P$ — гомотопии кривых $\varphi\,|\,[a,b]$ и $\varphi\,|\,[b,c]$ в постоянное отображение в точку φb, так что $\Phi'(b,\tau)=\varphi b=\Phi''(b,\tau)$ для всех $\tau\in[0,1]$. Тогда Φ' и

Φ'' определяют непрерывное отображение $\Phi: Q \to P$, где $\Phi|Q' = \Phi'$ и $\Phi|Q'' = \Phi''$.
Полагаем $\Phi'(t, \tau) = \Phi(t, 1-\tau)$.

§ 25, *стр.* 152

Параллельный перенос окружности φ_0 в окружность φ_1 на вектор, идущий от центра первой окружности до центра второй, является гомотопией, при которой кривая φ_τ не пересекает y. При линейной гомотопии кривая не пересекает y, но пересекает x.
Ориентации кривых φ_0 и φ_1 при этой гомотопии не соответствуют одна другой. Если бы, скажем, мы изменили ориентацию кривой φ_1 на обратную, то они уже соответствовали бы.

§ 26, *стр.* 154

Непрерывное отображение φ_0' промежутка $[0, 1]$ на границу C' прямоугольника D', которое на каждом из частичных промежутков $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ и т. д. является подобием и отображает этот частичный промежуток на соответствующую сторону C'. Φ' есть линейная гомотопия кривой φ_0' в постоянную замкнутую кривую в центре прямоугольника D'. Никаких других изменений не требуется.

§ 27, *стр.* 156

Теорема. Пусть f: $F \to P$ — непрерывное отображение прямоугольника вместе с его внутренностью в плоскость, оставляющее неподвижными все точки границы E прямоугольника F. Тогда образ fF содержит весь прямоугольник F.

Следствие. Не существует непрерывного отображения прямоугольника вместе с его внутренностью в его границу, оставляющего неподвижными все точки границы.

Доказательство теоремы. Следуя указанию, рассмотрим гомеоморфизм $h: P \to P$, при котором $hD = F$. Тогда композиция fh отображает круг D в P, и $h^{-1}fh$ есть непрерывное отображение круга D в плоскость P. По построению, если y — точка граничной окружности C круга D, то $hy \in E$ и $fhy = hy$. Таким образом, $h^{-1}fhy = y$. Композиция $h^{-1}fh$ является тогда непрерывным отображением круга в плоскость, оставляющим неподвижными все точки граничной окружности. По теореме из этого параграфа образ $h^{-1}fhD$ содержит весь круг D, т. е. $h^{-1}fhD \supset D$, поэтому $fhD \supset hD$. Так как $hD = F$, то это последнее утверждение означает, что $fF \supset F$.
Возьмем в качестве f проекцию на окружность из точки y, т. е. для любой точки $x \in D - y$ образ fx есть точка, в которой прямая, проходящая через x и y, пересекает $C - y$.
Нужно рассмотреть радиальную проекцию из точки y_0 на C.
а) Например, ортогональная проекция на диаметр.

b) Постоянное отображение в эту точку круга.

5. Не существует непрерывного отображения отрезка s на множество его концов, оставляющего неподвижным каждый из этих концов, потому что отрезок s связен; значит, должен быть связным и любой его непрерывный образ, а множество, состоящее из двух точек, не связно.

§ 28, *стр.* 159

1. b) Этот диаметр.

c) Центр.

d) Точка, лежащая на линии центров на расстоянии $(2/3)r$ от центра круга D.

e) При определенном таким образом отображении f горизонтальный диаметр L переходит в себя. Введя на нем координату x с началом z, находим, что $fx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}r$. Неподвижной точкой будет $x = \frac{1}{3}r$.

f) Снова горизонтальный диаметр переходит в себя, и отображение на нем задается формулой

$$fx = \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{3}r.$$

Неподвижной точкой является $x = -\frac{2}{9}r$.

2. См. ответ к упражнению 4, § 9.

§ 30, *стр.* 164

1. a) f есть постоянное отображение, рассмотренное в этом параграфе; все векторы поля параллельны и имеют одну и ту же длину и одинаковое направление.

b) Так как $fx=x$, то вектор vx, который параллелен вектору (o, fx) и имеет те же длину и направление, что и этот вектор, будет иметь своим концом точку y, находящуюся от начала o на вдвое большем расстоянии, чем $d(o, x)$; вектор (o, y) идет по вектору (o, x) и имеет вдвое большую длину.

c) Для каждой точки x вектор vx идет от x до начала o.

d) Пусть параллельный перенос задается вектором (o, c), и пусть z — такая точка, что o есть середина отрезка, соединяющего z с c. Тогда этот параллельный перенос переводит точку z в o. Вектор рассматриваемого поля для точки z является нулевым. Остальные векторы поля «излучаются» из точки z в следующем смысле. Для каждой точки x вектор vx идет от точки x по прямой zx в направлении от точки z и имеет длину, равную расстоянию от z до x.

e) Пусть x' — ортогональная проекция произвольной точки x на прямую L, относительно которой производится отражение. Тогда вектор vx идет от точки x до точки x'' на прямой L, расстояние которой от o вдвое больше расстояния от o до x' и которая находится по ту же сторону от o, что и точка x'.

§ 31, *стр.* 167

1. Нет; поле v не определено в точке x, и не может быть в ней определено, оставаясь непрерывным.

2.

	Индекс	$vx=0$	Вектор vx направлен по касательной	Вектор vx направлен по внешней нормали	Вектор vx направлен по внутренней нормали
a)	0	нет	в концах диаметра, перпендикулярного к oz	в точке пересечения C с продолжением oz	в точке пересечения C с oz
b)	1	z	нет	все точки C	нет
c)	1	o	нет	в концах диаметра, проходящего через o и z	нет
d)	0	нет	в точках касания касательных к C из точки o	в точке пересечения C с продолжением oz	в точке пересечения C с oz
e)	0	нет	в точках, диаметрально противоположных точкам касания касательных к C из o	в точке пересечения C с продолжением oz	в точке пересечения C с oz
f)	0	нет	в точках, образы fx которых являются точками касания касательных к fC из o	в точке, соответствующей точке пересечения fC с продолжением ofz	в точке, соответствующей точке пересечения fC с ofz
g)	—1	z	в концах четырех радиусов, образующих углы в 45° с выбранным диаметром	в концах выбранного диаметра	в концах диаметра, перпендикулярного выбранному диаметру

§ 32, *стр.* 173

1. a) Пусть P' — плоскость, проходящая через z и перпендикулярная L, и C — окружность, по которой плоскость P' пересекается с S. Тогда все точки окружности C отображаются в точку пересечения z плоскости P' с L, а все пары диаметрально противоположных точек окружности C являются антиподами, имеющими один и тот же образ.
   b) Пара $(0, r, 0)$ и $(0, -r, 0)$.
2. Выберем сферу $\overline{S}$ с центром в Q, и пусть h — радиальная проекция из Q сферы $\overline{S}$ на сферу S. Тогда h есть гомеоморфизм, переводящий обычные антиподы на $\overline{S}$ в Q-антиподы на S. Если задано непрерывное отображение $f\colon S \to P$ сферы S в плоскость P, то составим композицию $fh\colon \overline{S} \to P$. Пара антиподов u, u' на $\overline{S}$, имеющих один и тот же образ, даст пару Q-антиподов hu, hu' на S, имеющих один и тот же образ.
3. Как и выше, например с помощью радиальной проекции, можно определить гомеоморфизм любой из этих поверхностей на сферу. Отсюда следует требуемое заключение.

§ 33, *стр.* 177

1. Плоскость, проходящая через центры этих трех тел.
2. Рассмотрим семейство всевозможных плоскостей, проходящих через ось полушара B, каждая из которых делит A и B пополам. Заключим три данных тела в достаточно большой шар D, имеющий своим диаметром ось L полушара B и центр z. Каждая точка x большого круга E шара D, лежащего в плоскости, перпендикулярной L, определяет некоторую плоскость P_x из нашего семейства, перпендикулярную к L. Ту сторону от плоскости P_x, которая содержит точку x, будем называть положительной. Пусть V_x — объем той части тела C, которая лежит по положительную сторону от P_x, а W_x — объем той его части, которая лежит по отрицательную сторону от P_x. Обозначим разность $V_x - W_x$ через fx. Тогда для антиподальных точек x и x' из E мы имеем $fx' = -fx$. Так как функция f непрерывна, то она должна обращаться в нуль на каждой половине окружности E.

§ 34, *стр.* 182

1. Рассмотрим ортогональную проекцию ux каждого вектора vx на плоскость, касательную к сфере в точке x. Тогда u — непрерывное касательное поле; поэтому для некоторой точки x вектор ux в силу теоремы будет нулевым. Так как каждый вектор vx не является нулевым, то вектор, который имеет нулевую касательную компоненту, нормален.
2. Радиальная проекция отображает эллипсоид и его касательное поле на сферу и поле, касательное к ней. Это отображение непрерывно и переводит нулевые векторы в нулевые векторы.

§ 35, *стр.* 187

1. a) Параллельный перенос на 4 единицы влево.
   b) Параллельный перенос на 2 единицы вверх.
   c) Параллельный перенос на $\sqrt{2}$ единиц на юго-восток.
   d) Растяжение от начала с коэффициентом 2; подобие.
   e) Вращение вокруг начала на 180°.
   f) Вращение вокруг начала на 90°.
   g) Вращение вокруг начала на 45° и затем растяжение в $\sqrt{2}$ раз.
   h) То же отображение, что и в предыдущем случае, за которым следует параллельный перенос на 3 единицы вниз.
   i) Отображение z^2, описанное в этом параграфе, за которым следует поворот вокруг начала на 90° и параллельный перенос на $2\sqrt{2}$ единиц на северо-восток.
   j) Инверсия относительно единичной окружности, за которой следует отражение относительно оси x.

§ 36, *стр.* 191

1. Пусть $z \in E$ и $r=|z|$. Так как $r>r_0$, то доказательство применимо к окружности C радиуса r, и оно показывает, что функция $g(z, r)$ не равна нулю при $z \in E$ и $\tau \in [0, 1]$. При $\tau=0$ получаем, что функция $g(z)$ не равна нулю. Следовательно, многочлен g, а значит, и многочлен f не обращаются на E в нуль.
2. a) Наибольшим из чисел $(4 \cdot 3)^1$, $0^{1/2}$, $(4 \cdot 2)^{1/3}$, $(4 \cdot 5)^{1/4}$ является число $r_0 = 12$.
   b) $g(z) = \frac{1}{2} f(z) = z^7 + \frac{1}{2} iz^3 - \frac{3}{2} z$. Наибольшим из чисел $(7/2)^{1/4}$ и $(21/2)^{1/6}$ является число $r_0 = (21/2)^{1/6}$.
   c) $r_0 = 4\sqrt{5}$.
3. $fz = 4(z^3 - (1+i)z^2 - (2-i)z + 2i)$. Наибольшим из чисел $3\sqrt{2}$, $(3\sqrt{5})^{1/2}$, $(3 \cdot 2)^{1/3}$ является число $r_0 = (3\sqrt{5})^{1/2}$, приближенно равное 6,7. Модули корней 2, -1 и i соответственно равны 2, 1 и 1.
4. a) Нули равны $-2/3$ и 5, а $r_0 = 26/3$.
   b) Нули равны $(1 \pm i\sqrt{2})/3$; они имеют модули $\sqrt{3}/3$, и $r_0 = 4/3$.
5. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|h(z)| \leqslant \frac{|a_1|}{r} + \frac{|a_2|}{r^2} + \ldots + \frac{|a_n|}{r^n}.$$

Поскольку правая часть меньше единицы, мы имеем $|h(z)| < 1$.

После этого остается повторить последние пять предложений из доказательства теоремы 36.1.

Взяв в нашем примере $r=2$, находим

$$\frac{0}{2}+\frac{|-1|}{4}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}<1.$$

Так что круг радиуса 2 содержит все нули рассматриваемого многочлена (ср. с $r_0=15^{1/3}$, что приближенно равно 2,5).

Литература

[1] Александров П. С. и Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М. — Л., ОНТИ, 1936.

[2] Ефремович В. А., Основные топологические понятия, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, М., изд-во «Наука», 1966, стр. 476—556.

[3] Болтянский В. Г. и Ефремович В. А., Очерк основных идей топологии, *Математическое просвещение* (новая серия), вып. 2, 1957, стр. 3—34; вып. 3, 1958, стр. 5—40; вып. 4, 1959, стр. 27—52; вып. 6, 1961, стр. 107—138.

[4] Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, М. — Л., Гостехиздат, 1947.

[5] Гильберт Д. и Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

[6] Зейферт Г. и Трельфалль В., Топология, М. — Л., Гостехиздат, 1938.

[7] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, М., ИЛ, 1960.

[8] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, М. — Л., Гостехиздат, 1947.

[9] Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., изд-во АН СССР, 1965.

[10] Хопф X., Некоторые личные воспоминания, относящиеся к предыстории современной топологии, *Успехи математических наук*, т. 21, № 4, 1966, стр. 8—16.

Предметный указатель

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление

Н. Стинрод, У. Чинн

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ

Редактор *Д. Ф. Борисова* Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *И. К. Дерва*

Сдано в производство 13/V 1967 г. Подписано к печати 3/X 1967 г.
Бумага типографская № 3. Формат $84\times108^1/_{32}$. 3,5 бум. л. 11,76 печ. л.
11,3 уч.-изд. л. Изд. № 1/4362. Цена 78 к. Зак. 712.

Издательство „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29

78 к.

Этой книгой издательство „Мир“ продолжает выпуск популярной серии „Современная математика“. В серию включены переводы лучших образцов зарубежной математической литературы для школьников.

Книги серии предназначаются для тех, кто любит математику и хочет заниматься ею самостоятельно. Они будут интересны школьникам старших классов, учителям и студентам, их можно будет использовать в работе школьных математических кружков.

Уже вышло пять книг этой серии:

О. Оре, Графы и их применение, 1965;

Э. Беккенбах, Р. Беллман, Введение в неравенства, 1965;

А. Нивен, Числа рациональные и иррациональные, 1966;

Р. Неванлинна, Пространство, время и относительность, 1966;

Н. Стинрод, У. Чинн, Первые понятия топологии, 1967,

и готовится к печати шестая:

Р. Линдон, Заметки по логике.